МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И
МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ»
(ГБПОУ КК «КМТ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических занятий
по дисциплине ЕН. 01 Математика

Специальность 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

2020

Рассмотрена на заседании цикловой методической комиссии ____________________________	Утверждаю Заместитель директора по учебно-методической работе ГБПОУ КК «КМТ»
Протокол от «____»________20___г. №___	______________/Ж.Г. Рувина/
Председатель_________ /_______________	«_____»_____________ 20___ г.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий предназначены для закрепления теоретических знаний и приобретение необходимых практических навыков и умений по программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика, составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

Организация - разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края «Краснодарский монтажный техникум»_

Составитель : *Валуева Л.А., преподаватель математики ГБПОУ КК «КМТ»*

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Математика составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

В соответствии с рабочей программой на изучение учебной дисциплины предусмотрено 80 часов, из которых 42 часов на проведение практических занятий.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Задачи:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретические знания по конкретным темам;

- формирование умения применять полученные знания на практике;

- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В программу включено содержание, направленное на формирование у обучающихся общих и профессиональных компетенций, необходимых для качественного освоения ОПОП СПО.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь: решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации. Необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранных языках.
ОК 11 Планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.
ПК 1.1 Организовывать и осуществлять эксплуатацию электроустановок промышленных и гражданских зданий.
ПК 2.4. Участвовать в проектировании силового и осветительного оборудования.
ПК 3.4. Участвовать в проектировании электрических сетей.
ПК 4.3. Участвовать в расчетах основных технико-экономических показателей.

Перечень практических занятий

Наименование раздела (темы)	Практическая работа	Содержание практической работы	Кол-во часов
Раздел 1. Понятие о числе. Комплексные числа	Практическое занятие № 1 Выполнение действий с приближенными значениями	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 2 Выполнение действий с комплексными числами в алгебраической форме	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 3 Выполнение действий с комплексными числами в показательной форме.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для	2

	Проверочная работа	самостоятельной работы	
Раздел 2. Математический анализ	Практическое занятие № 4 Нахождение предела функции. Проверочная работа	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	
Раздел 3. Линейная алгебра	Практическое занятие № 5 Выполнение действий над матрицами	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 6 Вычисление определителей	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 7 Решение систем линейных уравнений методом Крамера	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 8 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса и с помощью обратной матрицы. Проверочная работа	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 4. Элементы аналитической геометрии	Практическое занятие № 9 Действия с векторами	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 10 Составление уравнения прямой. Проверочная работа	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 5. Дифференциальное	Практическое занятие № 11 Вычисление	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и	2

исчисление	производных	задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	
	Практическое занятие № 12 Исследование функции.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 13 Исследование функции и построение графика.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 6. Интегральное исчисление	Практическое занятие № 14. Нахождение неопределенных интегралов	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 7. Дифференциальные уравнения	Практическое занятие № 15 Решение дифференциальных уравнений	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 8. Ряды	Практическое занятие № 16 Исследование рядов на сходимость	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 17 Разложение в ряд Фурье	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
Раздел 9. Основы дискретной математики	Практическое занятие № 18 Выполнение операций над множествами	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 19 Построение диаграмм	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и	

	Эйлера-Венна. Проверочная работа	задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	
Раздел 10. Теория вероятностей и математическая статистика	Практическое занятие № 20 Вычисление вероятности событий	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	
	Практическое занятие № 21 Решение статистических задач. Проверочная работа	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3.Решение заданий для самостоятельной работы	
ИТОГО			42

Общие методические рекомендации и рекомендации по выполнению практических занятий

При выполнении каждой практической работы необходимо придерживаться следующих правил:

1. Внимательно прочитайте инструкцию по выполнению практической работы.
2. Пользуясь рекомендациями к работе, выполните предложенные задания.
3. Оформите письменный отчет по выполненной практической работе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

1.Название темы Выполнение действий с приближенными значениями

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий с приближенными значениями и числами, записанными в стандартном виде

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач нту и приступайте к работе.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Округление десятичных дробей

Округление десятичной дроби – отбрасывание цифр младших разрядов, начиная с некоторого.

Погрешность округления – абсолютная погрешность, полученная при округлении.

Правила округления:

1. Если первая отбрасываемая цифра 5, 6, 7, 8, 9, то предшествующая ей цифра увеличивается на единицу.
2. Если первая отбрасываемая цифра 0, 1 , 2, 3. 4, то предшествующая ей цифра не изменяется

Пример

Число 0,2473 округлить а) до тысячных, б) до сотых, в) до десятых.

Решение.
а) $0{,}2473 \approx 0{,}247$ (т.к. округляем до 0,001, то первая отбрасываемая цифра 3, значит, 7 не изменяется)
б) $0{,}2473 \approx 0{,}25$ (т.к. округляем до 0,01, то первая отбрасываемая цифра 7, значит, 4 увеличиваем на единицу, т.е. до 5)
в) $0{,}2473 \approx 0{,}2$ (т.к. округляем до 0,1, то первая отбрасываемая цифра 4, значит, 2 не изменяется)
Ответ. а) 0,247; б) 0,25; в) 0,2 .

Нахождение погрешностей

Абсолютной погрешностью h приближения $x \approx a$ называется модуль разности между ее точным значением x и результатом измерения (***приближенным значением***) a .

$$h = |x - a|$$

Относительной погрешностью r приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности h этого числа к модулю числа a данной величины, т.е. $r = \frac{h}{|a|}$

Относительная погрешность характеризует точность измерения и часто выражается в процентах. $r = \frac{h}{|a|} \cdot 100\%$

Пример
Число 2,19 округлили до целого. Найти абсолютную и относительную погрешности.
Решение.
По правилам округления $2{,}19 \approx 2$ значит, точное значение $x = 2{,}19$, приближенное $a = 2$.
Абсолютная погрешность: $h = |a - x| = |2 - 2{,}19| = 0{,}19$
Относительная погрешность: $r = \frac{h}{|a|} = \frac{0{,}19}{2} \approx 0{,}095$, выразим в процентах: $r = 0{,}095 \cdot 100\% = 9{,}5\%$
Ответ: $h = 0{,}19$ $r = 0{,}095 = 9{,}5\%$

Вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей

Вычисления можно упростить, применяя правила подсчета цифр. Это самый грубый способ. Но его точность вполне достаточна для большинства технических расчетов
Правила подсчета цифр.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом, у которого наименьшее число десятичных знаков.
2. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендует предыдущее правило. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.
3. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.
4. Если предложено произвести вычисления с заданной точностью, то следует округлить числа, входящие в выражение с большей точностью (хотя бы на один десятичный знак), а уже окончательное значение округлить до заданной точности.

Пример

Выполните действия с приближенными значениями чисел $145{,}561 + 43{,}4 + 0{,}15 - 5{,}035$

Решение.

В примере присутствует только сложение и вычитание, поэтому пользуемся первым правилом, не забывая про второе и третье.

Меньше всего десятичных знаков у числа 43,3 (один десятичный знак). Значит, учитывая шестое правило, все остальные слагаемые округляем до двух десятичных знаков (т.е. с одним лишним)

$$145{,}561 + \underline{43{,}4} + 0{,}15 - 5{,}035 \approx 145{,}56 + \underline{43{,}4} + 0{,}15 - 5{,}04 = 184{,}07$$

Ответ получили с двумя десятичными знаками. Т.к. один знак мы оставляли лишним для точности, то теперь его отбрасываем по правилам округления.

$$184{,}07 \approx 184{,}1$$

Т.е. ответ получили с таким же количеством десятичных знаков, как и число 43,3 (один десятичный знак)

Ответ. 184,1

Пример

Вычислите $a^2 + \sqrt{c} - a \cdot b$, если $a \approx 2{,}13, \quad b \approx 1{,}93, \quad c \approx 2{,}98$ с точностью 0,1

Решение.

Воспользуемся правилом 4. Т.е. промежуточные вычисления округлим до двух десятичных знаков (т.к. точность ответа должна быть - один десятичный знак)

$a^2 = 2{,}13^2 = 4{,}5369 \approx 4{,}54$

$\sqrt{c} = \sqrt{2{,}98} \approx 1{,}73$

$a \cdot b = 2{,}13 \cdot 1{,}93 = 4{,}1109 \approx 4{,}11$

$a^2 + \sqrt{c} - a \cdot b = 4{,}54 + 1{,}73 - 4{,}11 = 2{,}16 \approx 2{,}2$ (ответ с точностью 0,1)

Ответ. 2,2

Стандартный вид числа

Число в стандартном виде: $a \cdot 10^n$,

где $1 \le a < 10,\ n \in Z$. **n** *– порядок числа*

Алгоритм перевода числа в стандартный вид

1. Передвинуть десятичную запятую так, чтобы она стояла после первой значащей цифры числа. Нули, стоящие впереди значащих цифр и позади них отбросить.
2. Посчитать на сколько разрядов передвинулась запятая (это и будет число ***n***)
3. Определить направление сдвига запятой
   (это будет знак числа ***n***: влево – ***n*** положительное,
   вправо – ***n*** отрицательное).
4. Дописать к полученной записи множитель 10^n.

Пример.

Записать число в стандартном виде. *а)* –2 180 000 *б)* 0,00281

Решение.

а) $-2180000 = -2{,}18 \cdot 10^6$

Первая значащая цифра 2, поэтому передвигаем запятую на 6 позиций влево. Т.е. ***n*** = 6

б) $0{,}00396 = 3{,}96 \cdot 10^{-3}$

Первая значащая цифра 3, поэтому передвигаем запятую на 3 позиции вправо. Т.е. ***n*** = –3

Ответ. *а)* $-2180000 = -2{,}18 \cdot 10^6$ *б)* $0{,}00396 = 3{,}96 \cdot 10^{-3}$

Действия с числами в стандартном виде

1. Сложение и вычитание.

при сложении и вычитании стандартных чисел показатели степеней 10 выравниваются.

Пример $4{,}5 \cdot 10^2 + 2{,}1 \cdot 10^3 = 0{,}45 \cdot 10^3 + 2{,}1 \cdot 10^3 = (0{,}45 + 2{,}1) \cdot 10^3 = 2{,}55 \cdot 10^3$

2. Умножение $\left(a \cdot 10^n\right) \cdot \left(b \cdot 10^m\right) = (a \cdot b) \cdot 10^{n+m}$

Пример $3{,}75 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^4 = (3{,}75 \cdot 0{,}4) \cdot 10^{3+4} = 1{,}5 \cdot 10^7$

3. Деление $\dfrac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^m} = \dfrac{a}{b} \cdot 10^{n-m}$

Пример $\dfrac{4{,}6 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 10^6} = \dfrac{4{,}6}{2{,}5} \cdot 10^{3-6} = 1{,}84 \cdot 10^{-3}$

Пример

Произвести действия с числами в стандартном виде:

1) $$\frac{0{,}08\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-7}\cdot 16\cdot 10^{-4}}=(\textit{приведем числа к стандартному виду})=$$
$$=\frac{8\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10\cdot 10^{-4}}=\frac{8\cdot 10^{-2-2}}{(4\cdot 1{,}6)\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}}=\frac{8\cdot 10^{-4}}{6{,}4\cdot 10^{-10}}=1{,}25\cdot 10^{-4-(-10)}=1{,}25\cdot 10^{6}$$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание1 Округлите десятичные дроби до сотых, до десятых, до единиц:

1) 0,2373 2) 3,35779 3) 14,756 4) 5,3267 5) 0,8952

Данные для самопроверки

1) 0,24; 0,2; 0 2) 3,36; 3,4; 3 3) 14,76; 14,6; 15

4) 5,33; 5,3; 5 5) 0,9; 0,9; 1

Задание2 Число округлили до целого. Найти абсолютную и относительную погрешности.

1) 2,5 2) 56,21 3) 125,9 4) 3,8 5) 98,32

Данные для самопроверки

1) 0,5; 17% 2) 0,79; 1,41% 3) 0,1; 0,08% 4) 0,2; 5% 5) 0,68; 0,69%

Задание3 Произвести действия с приближенными числами

1) 13,5 + 113,76 – 11,784 + 11,2171 2) 458,2635 – 108,316+264,43+748,2592

3) 38,2 + 46,8594 – 35,823 + 9,5658

4) Вычислите $c^3-\sqrt{a}-\frac{c}{b}$, если $a\approx 2{,}5,\quad b\approx 1{,}97,\quad c\approx 2{,}68$ с точностью 0,01

Данные для самопроверки

1) <u>13,5</u> + 113,76 – 11,784 + 11,2171 ≈ **126,7**

2) 458,2635 – 108,316+<u>264,43</u>+748,2592 ≈**1362,64**

3) <u>38,2</u> + 46,8594 – 35,823 + 9,5658≈ **58,8**

4) 16,308 ≈ **16,41**

Задание 4 Записать число в стандартном виде:

1) 27 000 2) –3 000 000 3) 0,000072 4) – 0,00458

Записать число в обычном виде:

5) $3{,}06\cdot10^{5}$ 6) $-5{,}4\cdot10^{3}$ 7) $7{,}85\cdot10^{-2}$ 8) $-5{,}003\cdot10^{-3}$

Данные для самопроверки

1) $2{,}7\cdot10^{4}$ 2) $-3\cdot10^{6}$ 3) $7{,}2\cdot10^{-5}$ 4) $-4{,}58\cdot10^{-3}$

5) 306000 6) –5400 7) 0,0785 8) –0,005003

Задание 5 Произвести действия с числами в стандартном виде:

1) $\dfrac{2\cdot500}{39{,}8\cdot10^{4}}$ 2) $\dfrac{1000\cdot0{,}545+500\cdot0{,}17+0{,}5\cdot10^{6}\cdot10^{-2}}{5}$ 3) $\dfrac{4\cdot10^{-7}\cdot100\cdot100}{2\cdot15\cdot10^{-2}}$

4) $5{,}037\cdot10^{5}+3{,}4\cdot10^{3}$ 5) $8{,}15\cdot10^{-1}-1{,}4554\cdot10^{2}$ 6) $7{,}2\cdot10^{4}\cdot4{,}1\cdot10^{-3}$

Данные для самопроверки

1) $2{,}512\cdot10^{-3}$ 2) 1126 3) $1{,}33\cdot10^{-2}$ 4) $5{,}071\cdot10^{5}$ 5) $-1{,}44725\cdot10^{2}$ 6) $2{,}952\cdot10^{2}$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Воспроизведите правила округления десятичных дробей.
2 Что такое абсолютная и относительная погрешности, что они характеризуют?
3 Как осуществлять вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В–1

1. Записать число в стандартном виде а) 2540000000 б) - 0 ,000064

2. Записать число в обычном виде а) $1{,}2\cdot10^{-4}$ б) $-5{,}6\cdot10^{3}$

3. Округлить число 0,185597 до единиц, десятых, сотых .

4. Число a_0 = 16,96 округлили до ближайшего целого. Найти абсолютную и относительную погрешности такого приближения. Вычисления проводить с точностью не менее 0,01.

5. Вычислите $c^2+\sqrt{c+a}-a/b$, если $a\approx 0{,}26,\quad b\approx 2{,}36,\quad c\approx 1{,}89$ с точностью 0,1 используя правила вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей

6. Вычислить $\dfrac{8\cdot 10^9\cdot 568\cdot 10^{-3}}{7\cdot 0{,}15\cdot 10^{-4}}$ используя правила действий с числами в стандартном виде.

В–2

1. Записать число в стандартном виде а) 89230000 б) - 0 ,0085
2. Записать число в обычном виде а) $1{,}7\cdot 10^{-3}$ б) $-5{,}4\cdot 10^{6}$
3. Округлить число 0,65284 до единиц, десятых, сотых .
4. Число a_0 = 20,84 округлили до ближайшего целого. Найти абсолютную и относительную погрешности такого приближения. Вычисления проводить с точностью не менее 0,01.
5. Вычислите $\sqrt{c\cdot a}-a^3+c/b$, если $a\approx 1{,}234,\quad b\approx 2{,}005\quad c\approx 1{,}503$ с точностью 0,01 используя правила вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей
6. Вычислить $\dfrac{1{,}8\cdot 10^3+5{,}68\cdot 10^4}{7\cdot 10^2-1{,}5\cdot 10^3}$ используя правила действий с числами в стандартном виде.

В–3

1. Записать число в стандартном виде а) 69231000 000 б) - 0 ,000235
2. Записать число в обычном виде а) $1{,}8\cdot 10^{-9}$ б) $-6{,}6\cdot 10^{4}$
3. Округлить число 0,52787 до единиц, десятых, сотых .
4. Число a_0 = 32,93 округлили до ближайшего целого. Найти абсолютную и относительную погрешности такого приближения. Вычисления проводить с точностью не менее 0,01.
5. Вычислите $b^2-\sqrt{a}-c\cdot b$, если $a\approx 1{,}45,\quad b\approx 1.27\quad c\approx 0.41$ с точностью 0,1 используя правила вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей
6. Вычислить $\dfrac{18\cdot 10^{-3}\cdot 123\cdot 10^4}{45\cdot 0{,}003\cdot 10^{-2}}$ используя правила действий с числами в стандартном виде.

В–4

1. Записать число в стандартном виде а) 8123000000000 б) - 0,00004564
2. Записать число в обычном виде а) $8{,}2\cdot 10^{-5}$ б) $-5{,}3\cdot 10^{5}$
3. Округлить число 0,72572 до единиц, десятых, сотых .
4. Число a_0 = 48,87 округлили до ближайшего целого. Найти абсолютную и относительную погрешности такого приближения. Вычисления проводить с точностью не менее 0,01.
5. Вычислите $\sqrt{b}-c/b+a^2$, если $a\approx 1.023,\quad b\approx 2.306\quad c\approx 0.401$ с точностью 0,01 используя правила вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей
6. Вычислить $\dfrac{2{,}5\cdot 10^2-3{,}24\cdot 10^3}{2\cdot 10^3+1{,}7\cdot 10^4}$ используя правила действий с числами в стандартном виде.

В–5

1. Записать число в стандартном виде а) 8960000 б) - 0,000264

2. Записать число в обычном виде а) $1{,}7\cdot10^{-2}$ б) $-8{,}6\cdot10^{7}$

3. Округлить число 0,35984 до единиц, десятых, сотых .

4. Число a_0 = 51,98 округлили до ближайшего целого. Найти абсолютную и относительную погрешности такого приближения. Вычисления проводить с точностью не менее 0,01.

5. Вычислите $a\cdot b-\sqrt{a}-c^3$, если $a\approx1{,}36$, $b\approx2.11$ $c\approx1{,}47$ с точностью 0,1 используя правила вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей

6. Вычислить $\dfrac{203\cdot10^2\cdot0{,}006\cdot10^3}{0{,}12\cdot0{,}23\cdot10^4}$ используя правила действий с числами в стандартном виде.

Распределение баллов:

Задание	1	2	3	4	5	6
Баллы	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**3**
Всего 13 баллов						

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 3	4 – 7	8 – 11	12 – 13
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

1.Название темы Выполнение действий с комплексными числами в алгебраической форме

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий с с комплексными числами в алгебраической форме

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Сумма $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Разность $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Произведение $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$ (числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Пример Даны два комплексных числа $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 6 - 9i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1) $z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (6 - 9i) = 4 + 6 + 5i - 9i = 10 - 4i$ (можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть)

2) $z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (6 - 9i) = 4 - 6 + 5i + 9i = -2 + 14i$ (можно просто раскрыть скобки и вычесть отдельно действительную и мнимую часть)

3) $z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (6 - 9i) = 24 - 36i + 30i - 45i^2 =$

$= 24 - 6i - 45 \cdot (-1) = 24 - 6i + 45 = 69 - 6i$

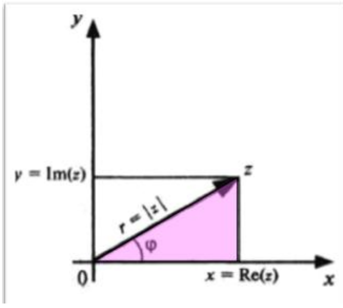
(можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть, но учитывая, что $i^2 = -1$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(4 + 5i) \cdot (6 + 9i)}{(6 - 9i) \cdot (6 + 9i)} = \frac{24 + 36i + 30i + 45i^2}{36 - 81i^2} = \frac{24 + 66i + 45 \cdot (-1)}{36 - 81 \cdot (-1)} =$$

4) $$\frac{24 + 66i - 45}{36 + 81} = \frac{-21 + 66i}{117} = -\frac{21}{117} + \frac{66}{117} i$$

(числитель и знаменатель умножаем на число, сопряженное знаменателю, т.е. на $\bar{z} = 6 + 9i$ чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Модуль и аргумент комплексного числа



Модуль $\boldsymbol{r}$ комплексного числа $z_1 = x + yi$ находится по формуле:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Модуль φ комплексного числа $z_1 = x + yi$ находится из соотношений:

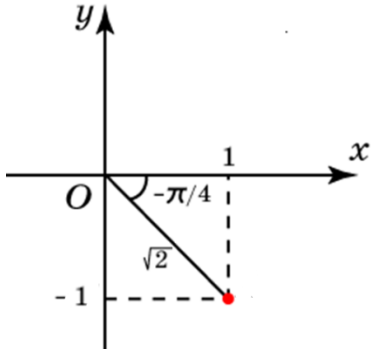
$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Пример: Задано комплексное число $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

<u>Решение</u>.

$z = 1 - i$, значит, $x = 1, \quad y = -1;$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;



$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^0$$

Значение аргумента находим из таблицы тригонометрических функций, находя соответствующее значение косинуса и синуса, т.е. по таблице смотрим, при каком угле (аргументе) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $r = \sqrt{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1) $z_1 = 2 - 8i$, $z_2 = 3 - 2i$ 2) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ 3) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 4i$

4) $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -5 - 2i$ 5) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 1 + 3i$

Данные для самоконтроля

1) $z_1 + z_2 = 5 - 10i$; $z_1 - z_2 = -1 - 6i$; $z_1 \cdot z_2 = -10 - 28i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{22}{13} - \frac{20}{13}i$

2) $z_1 + z_2 = 2$; $z_1 - z_2 = -4i$; $z_1 \cdot z_2 = 5$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

3) $z_1 + z_2 = -2 + 3i$; $z_1 - z_2 = 4 - 5i$; $z_1 \cdot z_2 = 1 + 7i$; $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$

4) $z_1 + z_2 = -1 - i$; $z_1 - z_2 = 9 + 3i$; $z_1 \cdot z_2 = -18 - 13i$; $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{22}{29} + \frac{3}{29}i$

5) $z_1 + z_2 = 4 - i$; $z_1 - z_2 = 2 - 7i$; $z_1 \cdot z_2 = 15 + 5i$; $\frac{z_1}{z_2} = -0{,}9 - 1{,}3i$

Задание 2 Выполнить действия: (*сначала выполнить умножение, а потом, деление)*

1) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$ 2) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$ 3) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$

Данные для самоконтроля

1) $-\frac{10}{13}+\frac{15}{13}i$ 2) $\frac{2}{136}+\frac{42}{136}i$; 3) $-\frac{3}{26}-\frac{41}{26}i$;

Задание 3 Задано комплексное число z. Найти $|z|$ и $\arg z$.

1) $z=1+i$ 2) $z=2i$ 3) $z=-2$ 4) $z=-\sqrt{3}+i$

Данные для самоконтроля

1) $r=\sqrt{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}=45^0$ 2) $r=2$; $\varphi=\frac{\pi}{2}=90^0$

3) 2) $r=2$; $\varphi=\pi=180^0$ 4) $r=2$; $\varphi=\frac{5\pi}{6}=150^0$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Воспроизведите правила действий над комплексными числами в алгебраической форме.
2 Как изображаются комплексные сила на комплексной плоскости?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В–1

Даны два комплексных числа $z_1=1+2i$, $z_2=2-3i$. Найти

$a)\ z_1+z_2$, $б)\ z_1-z_2$, $в)\ z_1\cdot z_2$, $г)\ z_1/z_2$,

В–2

Даны два комплексных числа $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$. Найти

$a)\ z_1+z_2$, $б)\ z_1-z_2$, $в)\ z_1\cdot z_2$, $г)\ z_1/z_2$,

В–3

Даны два комплексных числа $z_1=3+4i$, $z_2=4-5i$. Найти

$a)\ z_1+z_2$, $б)\ z_1-z_2$, $в)\ z_1\cdot z_2$, $г)\ z_1/z_2$,

В–4

Даны два комплексных числа $z_1=4+5i$, $z_2=5-6i$. Найти

$a)\ z_1+z_2$, $б)\ z_1-z_2$, $в)\ z_1\cdot z_2$, $г)\ z_1/z_2$,

В–5

Даны два комплексных числа $z_1=5+6i$, $z_2=6-7i$. Найти

$$а)\ z_1 + z_2, \qquad б)\ z_1 - z_2, \qquad в)\ z_1 \cdot z_2, \qquad г)\ z_1 / z_2,$$

Распределение баллов:

Задание	1 *а*	1 *б*	1 *в*	1 *г*	
Баллы	**1**	**1**	**2**	**3**	
Всего 7 баллов					

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 1	2 – 4	5 – 6	7
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

1.Название темы Выполнение действий с комплексными числами в показательной форме.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий с с комплексными числами в показательной форме

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Умножение $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

Деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

Возведение в степень $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi\right)$ (*формула Муавра*)

Показательная форма: $z = r\cdot e^{i\varphi}$

Умножение $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Возведение в степень $(z)^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$

Пример. Перевести в тригонометрическую и показательную форму компл. число $z=\sqrt{3}+i$.

Решение. У нас число задано в алгебраической форме, значит, чтобы перевести его в тригонометрическую или показательную, нужно найти r и φ

$z=\sqrt{3}+i$, значит, $x=\sqrt{3},\quad y=1$;

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2;$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}=30^0$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид: $z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Показательная форма имеет вид: $z=r\cdot e^{i\varphi}=2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Ответ. $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z=2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Пример. Перевести в алгебраическую форму комплексное число, заданное в тригонометрической форме $z=10\left(\cos150^0+i\cdot\sin150^0\right)$.

Решение. Находим по таблице значения косинуса и синуса в 150^0:

$$\cos150^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\qquad \sin150^0=\frac{1}{2}$$

Подставляя эти значения в запись комплексного числа, получаем:

$$z=10\left(\cos150^0+i\cdot\sin150^0\right)=10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=-5\sqrt{3}+5i$$

Таким образом, алгебраическая форма данного комплексного числа имеет вид: $z=-5\sqrt{3}+5i$.

Ответ. $z=-5\sqrt{3}+5i$.

Пример. Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найти $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2 в тригонометрической и показательной форме

$$z_1 = 4\left(\cos 150^0 + i\cdot\sin 150^0\right) \qquad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos 90^0 + i\cdot\sin 90^0\right)$$

Решение.

Из записи чисел имеем: $r_1 = 4, \quad r_2 = {}^1\!/_2, \quad \varphi_1 = 150^0, \quad \varphi_2 = 90^0.$

Действия в тригонометрической форме:

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) =$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(150^0+90^0\right) + i\cdot\sin\left(150^0+90^0\right)\right) = 2\left(\cos 240^0 + i\cdot\sin 240^0\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) =$$
$$= 4:\frac{1}{2}\left(\cos\left(150^0-90^0\right) + i\cdot\sin\left(150^0-90^0\right)\right) = 8\left(\cos 60^0 + i\cdot\sin 60^0\right)$$

Действия в показательной форме:

Запишем числа z_1 и z_2 в показательной форме:

$$z_1 = 4e^{i\cdot 150^0} \qquad z_2 = \frac{1}{2}e^{i\cdot 90^0}$$
$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{i(150^0+90^0)} = 2e^{i240^0}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = 4:\frac{1}{2}e^{i\left(150^0-90^0\right)} = 8e^{i60^0}$$

Как видно из примеров, показательная форма упрощает запись вычислений и оформление решения делает более компактным.

Пример. Вычислить $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10}$.

Решение. Запишем данное комплексное число в показательной форме.

$z = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$, значит, $x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2}$;

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^0$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:
$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Вычислим $z^{10} = r^{10}e^{i\cdot 10\varphi} = 2^{10}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 10\right)}$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму $x + iy$. Для этого запишем число в тригонометрической форме и подставим значения синуса и косинуса.

$$1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1024(0 + i\cdot(-1)) = -1024i.$$

Ответ: $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{10} = -1024i$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Перевести в тригонометрическую и в показательную форму комплексное число

1) $z = 1 - i$ 2) $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ 3) $z = -4i$ 4) $z = -1 + \sqrt{3}i$ 5) $z = 5$

Данные для самоконтроля

1) $z = \sqrt{2}\left(\cos(-45^0) + i\sin(-45^0)\right)$; $z = \sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) $z = 8\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)$; $z = 8\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

3) $z = 4\left(\cos(-90^0) + i\sin(-90^0)\right)$; $z = 4\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$

4) $z = 2\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right)$; $z = 2\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$

5) $z = 5\left(\cos 180^0 + i\sin 180^0\right)$; $z = 5\cdot e^{\pi i}$

Задание 2 Перевести в алгебраическую форму комплексное число

1) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$ 3) $z = 4\left(\cos 60^0 + i\cdot\sin 60^0\right)$

Данные для самоконтроля

1) $z = 1 + i$; 2) $z = 3 + \sqrt{3}i$; 3) $z = 2 + \sqrt{3}i$;

Задание 3 Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 в тригонометрической и показательной форме

1) $z_1 = 4(\cos 150^0 + i \cdot \sin 150^0)$ $\quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^0 + i \cdot \sin 90^0)$

2) $z_1 = 8(\cos 135^0 + i \cdot \sin 135^0)$ $\quad z_2 = 2(\cos 45^0 + i \cdot \sin 45^0)$

Данные для самоконтроля

1) $z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 240^0 + i \sin 240^0)$; $\quad z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{\frac{4\pi}{3} i}$

$\frac{z_1}{z_2} = 8(\cos 60^0 + i \sin 60^0)$; $\quad \frac{z_1}{z_2} = 8 \cdot e^{\frac{\pi}{3} i}$

2) $z_1 \cdot z_2 = 16(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$; $\quad z_1 \cdot z_2 = 16 \cdot e^{\pi i}$

$\frac{z_1}{z_2} = 4(\cos 90^0 + i \sin 90^0)$; $\quad \frac{z_1}{z_2} = 4 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$

Задание 4 Выполнить действия и результат представить в алгебраической форме:

1) $6(\cos 19^0 + i \cdot \sin 19^0) \cdot 8(\cos 31^0 + i \cdot \sin 31^0) \cdot \frac{1}{24}(\cos 40^0 + i \cdot \sin 40^0)$

2) $\frac{1/2(\cos 210^0 + i \cdot \sin 210^0)}{1/4(\cos 150^0 + i \cdot \sin 150^0)}$ $\quad$ 3) $10e^{i15^0} \cdot 12e^{i30^0}$

4) $27e^{i86^0} : 18e^{i26^0}$ $\quad$ 5) $(10 + 10i)^4$ $\quad$ 6) $[2(\cos 60^0 + i \cdot \sin 60^0)]^6$

7) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$ $\quad$ 8) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{20}$ $\quad$ 9) $(\cos 120^0 + i \cdot \sin 120^0)^3$

10) $\frac{(1-i)^5 \cdot i}{2e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}}$

Данные для самоконтроля

1) $z = 2i$ $\quad$ 2) $z = 1 + \sqrt{3}i$ $\quad$ 3) $z = 60\sqrt{2} + 60\sqrt{2}i$ $\quad$ 4) $z = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i$

5) -100 $\quad$ 6) 64 $\quad$ 7) $-1024i$ $\quad$ 8) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\quad$ 9) 1 $\quad$ 10) $z = -2 + 2i$

8.Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Воспроизведите правила действий над комплексными числами в тригонометрической форме.
2. Воспроизведите правила действий над комплексными числами показательной форме.

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	1	2	3	4	5
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В–1

Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = 1$.

1. Найти модули этих чисел, т.е. r_1 и r_2
2. Найти аргументы этих чисел, т.е. φ_1 и φ_2
3. Записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и показательной форме.
4. Выполнить действия в показательной форме
   $a)\ z_1 \cdot z_2, \quad б)\ z_1 / z_2, \quad в)\ z_1^6$

   (результат в п. ***в)*** перевести в алгебраическую форму)

В–2

Даны два комплексных числа $z_1 = -1 - i, \quad z_2 = \sqrt{2}$.

1. Найти модули этих чисел, т.е. r_1 и r_2
2. Найти аргументы этих чисел, т.е. φ_1 и φ_2
3. Записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и показательной форме.
4. Выполнить действия в показательной форме
   $a)\ z_1 \cdot z_2, \quad б)\ z_1 / z_2, \quad в)\ z_1^4$

   (результат в п. ***в)*** перевести в алгебраическую форму)

В–3

Даны два комплексных числа $z_1 = 3 - 3i, \quad z_2 = 7i$.

1. Найти модули этих чисел, т.е. r_1 и r_2
2. Найти аргументы этих чисел, т.е. φ_1 и φ_2
3. Записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и показательной форме.

4. Выполнить действия в показательной форме

$a)\ z_1 \cdot z_2,\quad б)\ z_1 / z_2,\quad в)\ z_1^4$

(результат в п. ***в)*** перевести в алгебраическую форму)

В–4

Даны два комплексных числа $z_1 = -i,\quad z_2 = -1 - i$.

1. Найти модули этих чисел, т.е. r_1 и r_2
2. Найти аргументы этих чисел, т.е. φ_1 и φ_2
3. Записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и показательной форме.
4. Выполнить действия в показательной форме

$a)\ z_1 \cdot z_2,\quad б)\ z_1 / z_2,\quad в)\ z_2^4$

(результат в п. ***в)*** перевести в алгебраическую форму)

В–5

Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\quad z_2 = -2 + 2i$.

1. Найти модули этих чисел, т.е. r_1 и r_2
2. Найти аргументы этих чисел, т.е. φ_1 и φ_2
3. Записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и показательной форме.
4. Выполнить действия в показательной форме

$a)\ z_1 \cdot z_2,\quad б)\ z_1 / z_2,\quad в)\ z_1^6$

(результат в п. ***в)*** перевести в алгебраическую форму)

Распределение баллов:

Задание	1	2	3	4 *а*	4 *б*	4 *в*
Баллы	**2**	**4**	**2**	**2**	**2**	**3**
Всего 15 баллов						

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 3	4 – 10	11 – 13	14 – 15
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

1.Название темы Нахождение предела функции.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков нахождения пределов функции

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение. **Пределом** функции $y = f(x)$ называется число A к которому неограниченно приближается значение функции, в то время, как значение аргумента неограниченно приближается к т. x_0

В символической записи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Теорема 1 (единственности) Функция не может иметь более одного предела.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** ***(б.м.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно приближается к нулю. т.е. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0}$

Пример: Функция $y = 2^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$. Т.е. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** ***(б.б.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно возрастает или неограниченно убывает т.е. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty}$.

Пример: Функция $y = x$ является бесконечно большой при $x \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

<u>Теорема 2</u> Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.м.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.б.*** при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

<u>Теорема 3</u> Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.б.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.м***. при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

<u>Теорема 4</u> Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

<u>Теорема 5</u> Предел произведения функций равен произведению их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

<u>Следствие 1.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(т.к. предел постоянного числа равен самому этому числу, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$)

<u>Следствие 2.</u> Предел степени функции равен степени предела функции

$$\lim_{x \to x_0} f^n(x) = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n$$

<u>Теорема 6</u> Предел частного двух функций равен частному их пределов, если эти пределы существуют и предел делителя не ноль.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Пример. Последовательность задана формулой $a_n = \dfrac{(-1)^n 4^n}{n+3}$.

Найти a_1, a_2, a_3.

<u>Решение:</u>

$$a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot 4^1}{1+3} = -\frac{4}{4} = -1; \qquad a_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 4^2}{2+3} = \frac{16}{5}; \qquad a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot 4^3}{3+3} = -\frac{64}{6}$$

<u>Ответ:</u> $a_1 = -1$, $a_2 = \dfrac{16}{5}$, $a_3 = -\dfrac{64}{6}$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x \ -3}{x^2+x-4}$.

<u>Решение:</u> При подстановке предельного значения аргумента $x=1$ в предельную функцию $\dfrac{x \ -3}{x^2+x-4}$, Получаем число 1, это и есть значение искомого предела: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x \ -3}{x^2+x-4} = \dfrac{1-3}{1+1-4} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

<u>Ответ:</u>1

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-3}{x-4}$.

<u>Решение:</u> При подстановке предельного значения аргумента $x=4$ в числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x-3}{x-4}$, получаем в числителе число 1, а в знаменателе число 0, значит, в знаменателе находится функция, стремящаяся к нулю, при $x \to 4$, т.е. бесконечно малая функция. По теореме 2 получаем, что данный предел равен бесконечности: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-3}{x-4} = \dfrac{4-3}{4-4} = \left\langle \dfrac{1}{0} \right\rangle = \infty$

<u>Ответ:</u> ∞ .

ПРАВИЛО 1

Чтобы избавиться от неопределенности $\left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle$, раскладываем числитель и знаменатель дроби на множители, пользуясь либо формулами сокращенного умножения, либо формулой разложения квадратного трехчлена на множители (*см. в Приложении*). После этого сокращаем одинаковый множитель числителя и знаменателя, тем самым, избавляясь от неопределенности.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

Решение:

После подстановки предельного значения $x=2$ в предельную функцию $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ получаем неопределенность $\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle$.

Далее опять подставляем $x=2$ в предельную функцию $y=\frac{x+2}{x+3}$ и получаем число. Предел вычислен.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{2+2}{2+3}=0{,}8$$

Ответ: 0,8 .

ПРАВИЛО 2

Чтобы избавиться от неопределенности $\left\langle\dfrac{\infty}{\infty}\right\rangle$ делим каждое слагаемое числителя и знаменателя на переменную *x* в самой старшей степени, в какой она встречается дроби.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3}$.

Решение: После подстановки предельного значения $x=\infty$ в предельную функцию $y=\dfrac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3}$ получаем неопределенность $\left\langle\dfrac{\infty}{\infty}\right\rangle$.

В данном случае, старшая степень переменной это x^3. После выполнения действий со степенями получаем алгебраическую сумму чисел и бесконечно малых функций. Предел бесконечно малой функции при $x\to\infty$ равен нулю, предел же числа равен этому числу.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^2}+3}{\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^2}+2}=\frac{0-0+3}{0+0+2}=1{,}5$$

Ответ: 1,5.

При вычислении пределов с неопределенностью $\left\langle\dfrac{\infty}{\infty}\right\rangle$ можно заметить:

В зависимости от того, где находится старшая степень, мы в итоге получаем:

Число если старшая степень одинакова и в числителе и в знаменателе,

∞ если старшая степень находится в числителе

0 если старшая степень находится в знаменателе

Замечательные пределы

1-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Следствия из первого замечательного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{arctgx}=1$.

2-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{tg5x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{tg5x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{8x\cdot\sin 8x}{8x}\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x\cdot\sin 8x}{8x}\cdot\frac{5x}{5x\cdot\sin 5x}\cdot\cos 5x=$$

$$\frac{8}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x=\frac{8}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Ответ: 1,6.

Пример.

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x-4}{9x+2}\right)^{5x-3}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x-4}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)-2-4}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)-6}{9x+2}\right)^{5x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)}{9x+2}+\frac{-6}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{9x+2}{-6}}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}\cdot\frac{-6}{9x+2}\cdot(5x-3)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}\cdot\frac{-30x+18}{9x+2}\cdot}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}\cdot}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30x+18}{9x+2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30x+18}{9x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-30x}{x}+\frac{18}{x}}{\frac{9x}{x}+\frac{2}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30+\frac{18}{x}}{9+\frac{2}{x}}}=e^{\frac{-30+0}{9+0}}=e^{\frac{-30}{9}}=e^{-\frac{10}{3}}$$

<u>Ответ:</u> $e^{-\frac{10}{3}}$.

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Последовательность задана формулой a_n. Найти $a_1,\ a_2,\ a_3$.

1) $a_n=\dfrac{1}{n}$	3) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$	5) $a_n=\dfrac{n+5}{n^2}$
2) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$	4) $a_n=\dfrac{(-1)^n(n+1)^2}{n^3}$	6) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$

Данные для самоконтроля

1) $a_1=1$ $a_2=\dfrac{1}{2}$ $a_3=\dfrac{1}{3}$ 2) $a_1=-1$ $a_2=\dfrac{1}{2}$ $a_3=-\dfrac{1}{3}$

3) $a_1=0$ $a_2=\dfrac{1}{3}$ $a_3=\dfrac{1}{2}$ 4) $a_1=-4$ $a_2=\dfrac{9}{8}$ $a_3=\dfrac{-16}{27}$

5) $a_1=6$ $a_2=\dfrac{7}{4}$ $a_3=\dfrac{8}{9}$ 6) $a_1=-\dfrac{1}{2}$ $a_2=\dfrac{1}{9}$ $a_3=-\dfrac{1}{64}$

Задание 2 Найти предел функции

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-1}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x+8}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-9}{100-x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{2x^2-13x-7}$

6) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{64-x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{2x^2+3x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-8}{x^2+x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-2}{x^2-x-2}$

10) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{x^2-10x-11}$

11) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-6}$

Данные для самоконтроля

1) $\dfrac{31}{4}$ 2) 0 3) ∞ 4) ∞ 5) $\dfrac{14}{15}$ 6) $-\dfrac{17}{16}$ 7) 2 8) $-\dfrac{4}{7}$ 9) ∞ 10) $\dfrac{11}{6}$ 11) $\dfrac{3}{7}$

Задание 3 Найти предел функции

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{18x-7}{6x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{14x-2x^2+3}{7x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-3}{14x^3+11x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{15x^2-8x^5+6x-6}{2x^5+5x-x^2+1}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-27}{x^4-4x^2+3}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4-3x^4-9x}{3x^2+4x-5}$

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-8x+4}{3x^4+x^3-6x}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-5x^2-7}{3x^2-25x^4+4x^3+1}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^4-2x+7}{9x^3+6x+1}$

Данные для самоконтроля

1) 3 2) ∞ 3) 0 4) ∞ 5) -4 6) 0 7) 2 8) 0,2 9) ∞

Задание 4 Найти предел функции, используя первый и второй замечательные пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin^2 5x}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{8x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tg3x}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{8x-5}{8x+2}\right)^{3x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2}{\sin 5x\cdot tg3x}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x-3}\right)^{7x+1}$

Данные для самоконтроля

1) $\frac{3}{25} = 0{,}12$ 2) e^{8} 3) 15 4) $e^{-\frac{21}{8}}$ 5) $\frac{3}{5} = 0{,}6$ 6) $e^{\frac{63}{2}}$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Как избавиться от неопределенности $\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$ или $\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$?

2 Замечательные пределы.

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	1	2	3	4	5
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В 1

1. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n+1}$. Найти $a_1, \ a_2, \ a_3$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-2}{6x-42}$

в) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{2x^2+7x-30}{x^2-36}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{1+2x^2+5x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{1+2x^2}$;

В 2

1. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{n+3}$. Найти $a_1, \ a_2, \ a_3$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-2}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2-5x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+8x^2+4}{6x^3-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{2x^4-6}$

В 3

1. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{(-1)^{n+2} 5^n}{n+4}$. Найти $a_1, \ a_2, \ a_3$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x+8}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+5x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x^2}{4x^3-7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-1}{3x^2-4}$

В 4

1. Последовательность задана формулой $a_n=\dfrac{(-1)^n 2^n}{n+3}$. Найти a_1, a_2, a_3.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x+6}{x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x-24}{2x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{4x^2+5x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-x^3+1}{3x^3+4x^4+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+x^2+x}{6-x^3-3x}$

В 5

1. Последовательность задана формулой $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}3^n}{n+5}$. Найти a_1, a_2, a_3.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x+6}{x^2+10}$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+2}{4x^2+4x+3}$

Распределение баллов:

Задание	1	2а	2б	2в	2г	2д
Баллы	**2**	**2**	**2**	**6**	**4**	**4**
Всего 20 баллов						

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 7	9 – 13	14 – 17	18 – 20
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

1.Название темы Выполнение действий над матрицами

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий с матрицами

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$, где числа $\boldsymbol{a_{ij}}$ называются элементами матрица.

Эта матрица имеет $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов.

Если $\boldsymbol{m = n}$, то матрица называется квадратной, порядка $\boldsymbol{n}$.

Если $\boldsymbol{m \neq n}$, то матрица называется прямоугольной размера $\boldsymbol{m \times n}$.

Квадратная матрица имеет определитель, который обозначим ΔA. Если $\Delta A \neq 0$, то матрица A называется ***невырожденной***, Если $\Delta A = 0$, то матрица A называется ***вырожденной***.

Две матрицы A и B считаются ***равными***, если:

1) А и В одинакового размера;
2) Соответствующие элементы совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$

Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ у которой все диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы равны нулю, называется ***единичной***.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***0-матрица***.

Действия над матрицами

1. Чтобы ***умножить матрицу на число***, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Чтобы ***сложить*** (***вычесть***) ***две матрицы*** <u>одинаковых размеров</u>, нужно сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

3. ***Матрицу А можно умножить на матрицу В*** только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Умножение проводится по правилу **«строка на столбец»**.

Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ будет иметь размер $m \times k$ и элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\,2\,1 \\ 0\,4\,2 \\ 1\,0\,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot7 \\ 2\cdot5+0\cdot0+1\cdot1 & 2\cdot2+0\cdot4+1\cdot0 & 2\cdot1+0\cdot2+1\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 26 \\ 11 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Формула ***возведения матрицы в степень*** работает только для квадратных матриц и натуральной степени: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ раз}$

Другими словами, для того, чтобы выполнить возведение матрицы в степень $\boldsymbol{n}$ нужно умножить её саму на себя $\boldsymbol{n}$ раз.

При возведении в степень матрицу удобно применять свойство: $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$

Пример. Для матриц A и B найти матрицы $C = 3 \cdot A + 4 \cdot B$ и $D = A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Решение:</u>

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 12 & 0 \\ 24 & 21 & 15 \end{pmatrix} \qquad 4B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -8 & 36 \\ 40 & 12 & 20 \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = 7 \cdot A + 4 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 12 & 0 \\ 24 & 21 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -8 & 36 \\ 40 & 12 & 20 \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+24 & -3-8 & 9+36 \\ 3+40 & 12+12 & 0+20 \\ 24+0 & 21-16 & 15+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -11 & 45 \\ 43 & 24 & 20 \\ 24 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 10 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) & 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 6 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) & 1 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 0 & 8 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 8 \cdot 9 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12-10+0 & -4-3-12 & 18-5+3 \\ 6+40+0 & -2+12+0 & 9+20+0 \\ 48+70+0 & -16+21-20 & 72+35+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -19 & 16 \\ 46 & 10 & 29 \\ 118 & -15 & 112 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ:</u> $C = \begin{pmatrix} 30 & -11 & 45 \\ 43 & 24 & 20 \\ 24 & 5 & 19 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & -19 & 16 \\ 46 & 10 & 29 \\ 118 & -15 & 112 \end{pmatrix}$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Для матриц A и B найти матрицы $C = 3 \cdot A - 5 \cdot B$ и $D = A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Данные для самоконтроля **:** $C = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -1 \\ -5 & 10 & -13 \\ -1 & 22 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 3 \\ 3 & 7 & 9 \\ 6 & 11 & 15 \end{pmatrix}$

Задание 2 Для матриц A и B найти матрицы $C = 2 \cdot A + 3 \cdot B$, $D = A \cdot B$, $M = A^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Данные для самоконтроля : $C=\begin{pmatrix}2&13&24\\11&22&33\\20&13&24\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}8&26&44\\17&62&107\\-1&17&35\end{pmatrix}$ $M=\begin{pmatrix}30&9&15\\66&27&42\\3&9&15\end{pmatrix}$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Воспроизведите правила действий над матрицами
2 Действие «умножение матриц» возможно для любых матриц?
3 Какая матрица называется единичной?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	1	2	3	4	5
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

Для матриц $A=\begin{pmatrix}4&-1&3\\-1&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$ найти матрицы $C=$ $-3\cdot A+2\cdot B$ и $D=$ $A\cdot B$.

В – 2

Для матриц $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&0\\3&0&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$ найти матрицы $C=$ $-3\cdot A+2\cdot B$ и $D=$ $A\cdot B$.

В – 3

Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&0\\3&0&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ найти матрицы $C=$ $-3\cdot A+2\cdot B$ и $D=$ $A\cdot B$.

В – 4

Для матриц $A=\begin{pmatrix}3&-1&3\\-1&4&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&4&1\\3&1&1\end{pmatrix}$ найти матрицы $C=$ $-3\cdot A+2\cdot B$ и $D=$ $A\cdot B$.

В – 5

Для матриц $A=\begin{pmatrix}4&-1&3\\-1&1&0\\3&0&5\end{pmatrix}$ и $\text{B}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&5\\4&5&1\end{pmatrix}$ найти матрицы $C=$ $-3\cdot A+2\cdot B$ и $D=$ $A\cdot B$.

Распределение баллов:

Задание	C	D
Баллы	**3**	**4**
Всего 7 баллов		

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 2	3 – 5	6	7
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

1.Название темы Вычисление определителей

2.Учебные цели: отработка умений и навыков вычисления определителей

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

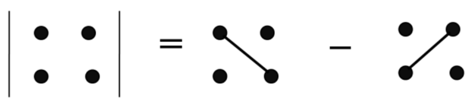
6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Определителем **второго порядка** называется **число**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



где a_{ij} – элементы определителя.

ij - двойной индекс.

i– номер строки, а j– номер столбца на пересечении которых находится элемент.

Пример $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 20 + 6 = 26$.

Определителем **третьего порядка** называется **число**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример Вычислить определитель 3-го порядка по определению

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot(-3)\cdot4 + 0\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot3\cdot4 - 0\cdot2\cdot5 - (-3)\cdot(-2)\cdot1 =$$

$$= 15 - 24 + 0 + 12 - 0 - 6 = -3$$

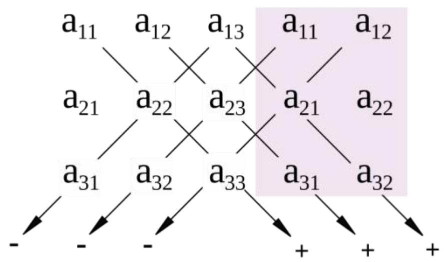
Правило Саррюса

Правило Саррюса— метод вычисления определителя матрицы третьего порядка. Призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки. Названо по имени французского математика *Пьера Фредерика Саррюса*.

Для матрицы 3х3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определитель находится суммированием шести произведений из трёх элементов. Действие выполняется согласно следующей схеме:

Первые два столбца матрицы записываются справа возле матрицы. Произведения элементов, стоящих на линиях с пометкой «+», складываются, затем из результата вычитаются произведения элементов, находящихся на линиях с пометкой «–»:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример Вычислить определитель 3-го порядка применяя правило Саррюса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot(-3)\cdot4 + (-1)\cdot0\cdot(-2) - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-3)\cdot(-2) - (-1)\cdot3\cdot4 =$$

$$= 15 - 24 + 0 - 0 - 6 - (-12) = -3$$

7. Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1 Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 20 & 7 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

Данные для самоконтроля :

1) –50 2) –3 3) 0 4) 7 5) -14 6) – 235 7) 23 8) 19

Задание 2 Вычислить определитель 3-го порядка применяя правило Саррюса:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 20 & 3 & 2 \\ 10 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

Данные для самоконтроля :

1) 148 2) –93 3) –253 4) – 26 5) 9 6) – 6 7) 41 8) – 148

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Как вычисляются определители второго порядка?.
2. Как с помощью Правила Саррюса можно вычислить определители третьего порядка?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

1.Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

В – 2

1. Вычислить определитель второго порядка по определению $\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

В – 3

1. Вычислить определитель второго порядка по определению $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

В – 4

1. Вычислить определитель второго порядка по определению $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix}$

В – 5

1. Вычислить определитель второго порядка по определению $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix}$

Распределение баллов:

Задание	1	2
Баллы	**2**	**5**
Всего 7 баллов		

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 1	2 – 4	5 – 6	7
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

1.Название темы Решение систем линейных уравнений методом Крамера

2.Учебные цели: отработка умений и навыков решения систем линейных уравнений методом Крамера

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных $i = 1,\ 2,\ \ldots\ m; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ n$

b_k – свободные члены

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. Составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Вычисляем его.

   Если $\Delta \neq 0$, значит, система совместна и определена, т.е. имеет единственное решение.
2. Вычисляются вспомогательные определители Δ_i, которые составляются из главного определителя Δ заменой столбца ***i*** на столбец свободных членов.
3. По формулам Крамера находятся неизвестные: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Пример Найти решение системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 16 \end{cases}$$

Решение.

1. Составим определитель из коэффициентов при неизвестных (главный определитель):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Так как главный определитель не равен нулю, то система имеет единственное решение.

2. Находим вспомогательные определители: Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя последовательно в главном определителе столбцы на числа, стоящие в правой части каждого из уравнений (столбец свободных членов)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & -3 \\ 16 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ -1 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & 16 \end{vmatrix} = 32.$$

3. Получаем единственное решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{16} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2.$$

<u>Ответ</u>. $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$.

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Решите СЛУ с тремя неизвестными методом Крамера.

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 16 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 26 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Данные для самоконтроля :

1) (8; 4; 2) -58 -464 -232 -116 2) (2; -3; 1) -69 -138 207 -69

3) (3; -2; 5) 99 297 -198 495 4) решений нет 0

5) (1; 2; 3) -5 -5 -10 -15

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Методом Крамера можно решить любую систему уравнений?
2 При каком условии система не имеет единственное решение?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1 Решить систему уравнений методом Крамера

1… $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 4x+3y=-1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1+7x_2-3x_3=-10 \\ 2x_1+9x_2-x_3=8 \\ -x_1+6x_2-3x_3=3 \end{cases}$

В – 2 Решить систему уравнений методом Крамера

1… $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=-4 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=-6 \\ x_1-8x_2+5x_3=1 \end{cases}$

В – 3 Решить систему уравнений методом Крамера

1… $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3=0 \\ -x_1+7x_2-5x_3=16 \\ x_1+6x_2-3x_3=18 \end{cases}$

В – 4 Решить систему уравнений методом Крамера

1… $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 4x-y=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2x_1+5x_2-6x_3=-8 \\ x_1+7x_2-5x_3=-9 \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12 \end{cases}$

В – 5 Решить систему уравнений методом Крамера

1… $\begin{cases} 7x+y=20 \\ x-5y=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$

Распределение баллов:

Задание	1 а	2 а
Баллы	**2**	**5**
Всего 7 баллов		

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 –2	3 – 5	6	7
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

1.Название темы Решение систем линейных уравнений методом Гаусса и с помощью обратной матрицы.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков решения систем линейных уравнений методом Гаусса и с помощью обратной матрицы

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Метод Гаусса

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных $i = 1,\ 2,\ \ldots\ m; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ n$

b_k – свободные члены

Последовательно исключают переменные и сводят систему к треугольному виду.

Треугольный вид системы – когда нижележащее уравнение системы содержит, по крайней мере, на одну неизвестную меньше, чем вышележащее.

Пример.

Найти общее решение системы: $\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ -2x+5y-6z=-8 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$

Решение.

С помощью операций умножения уравнения на число и алгебраического сложения двух уравнений заменим два из уравнений системы на уравнения, не содержащее переменную ***x***.

Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим его со вторым уравнением. Таким образом, мы уравняем коэффициенты при ***x***. Они станут равны по модулю и разные по знаку, поэтому при сложении уравнений слагаемые, содержащие переменную ***x,*** взаимно уничтожатся:

$$\begin{array}{r} 2x+14y-10z=-18 \\ -2x+\ \ 5y-6z=-8 \\ \hline 19y-16z=-26 \end{array}$$

Теперь в систему вместо второго уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-4) и сложим его с третьим уравнением.

$$\begin{array}{r} -4x-28y+20z=\ 36 \\ 4x+\ 2y-\ z=-12 \\ \hline -26y+19z=24 \end{array}$$

Теперь в систему вместо третьего уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ -26y+19z=24 \end{cases}$$

Итак, имеем систему с двумя уравнениям, где нет переменной ***x***.

Аналогичные операции проведем с третьим и вторым уравнением, чтобы получить уравнение, не содержащее переменную ***y***.

Умножим второе уравнение новой системы на 26 и сложим его с третьим уравнением, умноженным на 19.

$$\begin{array}{r} 494y-416z=-676 \\ -494y+361z=456 \\ \hline -55z=-220 \end{array}$$

Теперь в систему вместо третьего уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ -55z=-220 \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим:

$-55z=-220$

$z=4$

Подставляем значение $z=4$ во второе уравнение:

$19y-16z=-26$

$19y-64=-26$

$y=2$

Подставляем значения $z=4$ и $y=2$ в первое уравнение:

$x+7y-5z=-9$

$x+14-20=-9$

$x=-3$

Ответ. $x=-3$, $y=2$, $z=4$.

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Решите СЛУ с тремя неизвестными методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=7 \\ 3x_1-x_2+6x_3=19 \\ -4x_1+3x_2-x_3=8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+3x_3=6 \\ 5x_1-10x_2-5x_3=10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-3 \end{cases}$

Данные для самоконтроля :

1) (1; 2; 3) 2) (4; 0; 2) 3) (-4; -1; 5) 4) (2; 1; -2)

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 В чем заключается метод Гаусса?

2 Что такое треугольный вид системы?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1 Решить систему уравнений методом Гаусса

1… $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 4x+3y=-1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1+7x_2-3x_3=-10 \\ 2x_1+9x_2-x_3=8 \\ -x_1+6x_2-3x_3=3 \end{cases}$

В – 2 Решить систему уравнений методом Гаусса

1… $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=-4 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=-6 \\ x_1-8x_2+5x_3=1 \end{cases}$

В – 3 Решить систему уравнений методом Гаусса

1… $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3=0 \\ -x_1+7x_2-5x_3=16 \\ x_1+6x_2-3x_3=18 \end{cases}$

В – 4 Решить систему уравнений методом Гаусса

1… $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 4x-y=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2x_1+5x_2-6x_3=-8 \\ x_1+7x_2-5x_3=-9 \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12 \end{cases}$

В – 5 Решить систему уравнений методом Гаусса

1… $\begin{cases} 7x+y=20 \\ x-5y=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$

Распределение баллов:

Задание	1 б	2 б
Баллы	**2**	**6**
Всего 8 баллов		

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 –2	3 – 6	7	8
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

1.Название темы Действия с векторами

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий с векторами

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Действия с векторами

Пусть есть исходные вектора $\vec{a}=(x_a,\ y_a)$ и $\vec{b}=(x_b,\ y_b)$

1. **Умножение вектора на число**: $\lambda\vec{a}=(\lambda x_a,\ \lambda y_a)$

(умножаем каждую координату вектора на число)

2. **Сложение векторов** $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b,\ y_a+y_b)$

(складываем соответствующие координаты векторов)

3. **Вычитание векторов** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b,\ y_a-y_b)$

(вычитаем соответствующие координаты векторов)

4. **Скалярное произведение векторов** – это <u>число</u>

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами

Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2. $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$, отсюда

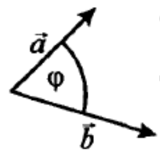
3. **угол между векторами**: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}\right)$

   или в координатной форме $\cos\varphi = \dfrac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

4. Условие перпендикулярности двух векторов ($\varphi = 90^0$)

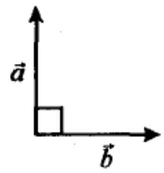
   $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ или в координатной форме $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$

5. Связь между знаком скалярного произведения двух векторов и угла между ними



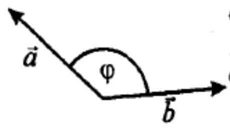
$0° \le \varphi < 90°$

$\overline{a} \cdot \overline{b} > 0$



$\varphi = 90°$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

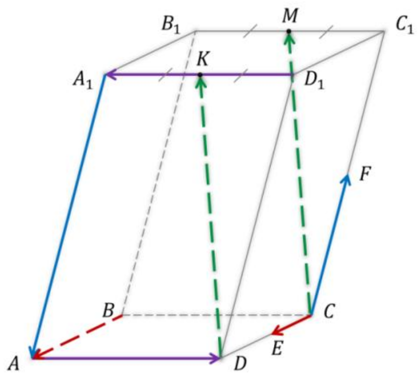


$90° < \varphi \le 180°$

$\overline{a} \cdot \overline{b} < 0$

Пример

Пользуясь данными рисунка, укажите для пары векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CE}$ правильный вариант ответа и пояснение:



а) сонаправленные
б) равные
в) противоположно направленные
г) противоположные

Решение.

Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CE}$ лежат на параллельных ребрах параллелепипеда, направлены в одну сторону, но не равны по длине, значит, они просто сонаправленные.

Ответ. а) сонаправленные

Пример Даны точки $A(1;\,2)$, $B\,(-1;\,5)$, $C(-1;\,2)$

Найти координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

Решение.

1. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (-1-1,\ 5-2) = (-2,\ 3)$$

2. Найдем координаты вектора $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C,\ y_A - y_C) = (-1-1,\ 2-2) = (-2,\ 0)$$

Ответ. $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 3)$; $\overrightarrow{CA} = (-2,\ 0)$

Пример Даны векторы $\overline{a}(5;-2)$ и $\overline{b}(-2;-1)$. Найти координаты вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 6\overline{b}$

Решение.

$$\overline{c} = 2\overline{a} - 6\overline{b} = 2\cdot(5;-2) - 6\cdot(-2;-1) = (10;-4) - (-12;-6) = (10+12;\ -4+6) = (22;\,2)$$

Ответ. $\overline{c} = 2\overline{a} - 6\overline{b} = (22;\,2)$

Пример Даны векторы $\overline{a}(-3;\,6)$ и $\overline{b}(8;-3)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-3,6)\cdot(8,-3) = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b = -3\cdot 8 + 6\cdot(-3) = -24 - 18 = -42$$

Ответ. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -42$

Пример Даны точки $A(1;\,2)$, $B\,(-1;\,5)$, $C(-1;\,2)$

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (-1-1,\ 5-2) = (-2,\ 3)$$

$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C,\ y_A - y_C) = (-1-1,\ 2-2) = (-2,\ 0)$$

2. Найдем скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = (-2,3)\cdot(-2,0) = -2\cdot(-2) + 3\cdot 0 = 4 + 0 = 4$$

3. Найдем длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

4. Найдем косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

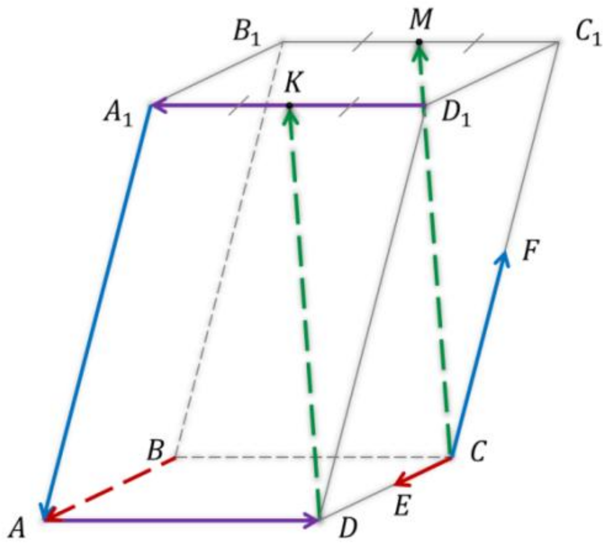
$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CA}|} = \frac{4}{\sqrt{13}\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Ответ. $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Выполните задания

1) Пользуясь данными рисунка, укажите для пары векторов $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{CF}$ правильный вариант ответа и пояснение:



а) сонаправленные
б) равные
в) противоположно направленные
г) противоположные

2) Даны точки B (-1; 5), C(-1; 2), D (1; 5).

Найти координаты и модули векторов $\overline{DB}$, $\overline{DC}$

3) Даны векторы $\bar{a}(-3;6)$ и $\bar{b}(8;-3)$. Найти координаты вектора $\bar{c} = -\bar{a} + 3\bar{b}$

4) Даны векторы $\bar{a}(1;-3)$ и $\bar{b}(0;\ 2)$. Найдите их скалярное произведение.

5) Даны точки B (-1; 5), C(-1; 2), D (1; 5)

Найти косинус угла между векторами $\overline{DB}$, $\overline{DC}$

Данные для самоконтроля:

1) в) противоположно направленные
2) $\overrightarrow{DB}=(2,\ 0);\quad \overrightarrow{DC}=(2,\ 3)$
3) $\bar{c}=-\bar{a}+3\bar{b}=(27,-15)$
4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$
5) $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

8. Контрольные вопросы и критерии оценки

1 Действия с векторами.
2 Свойства скалярного произведения
3 Условия параллельности векторов?
4 Условие перпендикулярности векторов?

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

1.Название темы Составление уравнения прямой.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков составления уравнения прямой

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Уравнение прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой $\boxed{Ax + By + C = 0}$

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $\boxed{y = kx + b}$

где $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой

b – отрезок, отсекаемый ею на оси OY

3. Каноническое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ **и параллельно вектору** $\bar{s} = (m, n)$ (*направляющий вектор прямой*)

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

4. Уравнение прямой в отрезках $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

где a, b – длины отрезков, отсекаемых на осях координат, взятые с соответствующими знаками

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Угол между прямыми

Пусть имеются две прямые: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, тогда угол φ между ними находится по формуле: $\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}}$

Отсюда,

<u>**Условие параллельности прямых**</u>: $\boxed{k_1 = k_2}$

<u>**Условие перпендикулярности прямых**</u>: $\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1)$ и параллельной вектору $\bar{s} = (4, -5)$

<u>Решение.</u>

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M(x_0, y_0)$ *и параллельно вектору* $\bar{s} = (m, n)$ (**№ 3**) найдем искомое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-5}$$

$$-5 \cdot (x - 2) = 4 \cdot (y - 1)$$

$-5x - 4y + 14 = 0$ общее уравнение данной прямой (**№ 1**)

$y = -\frac{5}{4}x + \frac{14}{4}$ уравнение с угловым коэффициентом данной прямой (**№ 2**)

<u>Ответ</u>. $-5x - 4y + 14 = 0$ или $y = -\frac{5}{4}x + \frac{14}{4}$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $D(3, 4)$

<u>Решение.</u>

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* (**№ 6**) найдем искомое уравнение:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{6}$$

$$6\cdot(x-1)=2\cdot(y+2)$$

$6x-2y-10=0$ общее уравнение данной прямой **(№ 1)**

$y=-3x-5$ уравнение с угловым коэффициентом данной прямой **(№ 2)**

Ответ. $6x-2y-10=0$ или $y=-3x-5$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,\,2)$ и параллельной прямой $y=5x+4$

Решение.

Т.к. прямые параллельны, то их угловые коэффициенты должны быть равны.

Угловой коэффициент прямой $y=5x+4$ равен $k_1=5$

Значит, и у искомой прямой угловой коэффициент равен $k_2=5$.

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом (№ 5)* найдем искомое уравнение:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

Прямая проходит через точку $A(3,\,2)$, значит, $x_0=3$ и $y_0=2$

$$y-2=5(x-3)$$

$$y-2=5x-15$$

$$y=5x-13$$

Ответ. $y=5x-13$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $D(-6,\,4)$ и перпендикулярно прямой $y=2x-3$

Решение.

Т.к. прямые перпендикулярны, то соотношение между их коэффициентами:

$$k_2=-\frac{1}{k_1}$$

Угловой коэффициент прямой $y=2x-3$ равен $k_1=2$

Значит, и у искомой прямой угловой коэффициент равен $k_2=-\frac{1}{2}$.

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом* **(№ 5)** найдем искомое уравнение: $y-y_0=k(x-x_0)$

Прямая проходит через точку $D(-6, 4)$, значит, $x_0 = -6$ и $y_0 = 4$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Ответ. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Пример

На плоскости дан треугольник с вершинами в точках *A*, *B* и *C*. Найти:

а) *длину стороны AB*;

б) *уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты*;

в) *внутренний угол B*;

A(3; -3) B(6; 1) C(7; -1)

Решение.

а) найдем длину стороны *AB* по формуле расстояние между точками:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(6-3)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

б) Найдем уравнения сторон *AB и BC* и их угловые коэффициенты.

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* найдем уравнение *AB* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)}$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{4}$$

$$4 \cdot (x-3) = 3 \cdot (y+3)$$

$$4x - 12 = 3y + 9$$

$$3y = 4x - 21$$

$y = \frac{4}{3}x - 7$ уравнение прямой *AB*

Значит, угловой коэффициент прямой *AB* равен $k_1 = \frac{4}{3}$

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* найдем уравнение BC:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-6}{7-6}=\frac{y-1}{-1-1}$$

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{-2}$$

$$-2\cdot(x-6)=1\cdot(y-1)$$

$$-2x+12=y-1$$

$y=-2x+13$ уравнение прямой BC

Значит, угловой коэффициент прямой BC равен $k_2=-2$

в) *Найдем внутренний угол B*;

Внутренний угол B это угол между прямыми AB *и* BC

Тангенс угла между прямыми вычисляется по формуле

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

$$tg\varphi=\frac{-2-\frac{4}{3}}{1+(-2)\cdot\frac{4}{3}}=\left(-2-\frac{4}{3}\right):\left(1+(-2)\cdot\frac{4}{3}\right)=-\frac{10}{3}:\left(\frac{3}{3}-\frac{8}{3}\right)=-\frac{10}{3}:\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}=2$$

$\varphi=arctg(2)$ угол между прямыми AB *и* BC

Ответ.

а) $|AB|=5$ б) $y=\frac{4}{3}x-7$ $k_1=\frac{4}{3}$ $y=-2x+13$ $k_2=-2$ в) $\varphi=arctg(2)$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 На плоскости дан треугольник с вершинами в точках *A*, *B* и *C*. Найти:

а) *длину стороны AB*;
б) *уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты*;
в) *внутренний угол B*;

A(-1; 1) B(2; 5) C(3; 3)

Данные для самоконтроля :

2) а) $|AB|=5$ б) $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$ $k_1=\frac{4}{3}$ $y=-2x+9$ $k_2=-2$ в) $\varphi=arctg(2)$

8. Контрольные вопросы, критерии оценки

1. Виды уравнений прямой?.
2. Что такое угловой коэффициент и что он означает?
3. Условие параллельности прямых?
4. Условие перпендикулярности прямых?

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

1.Название темы Вычисление производных

2.Учебные цели: отработка умений и навыков вычисления производных

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Правила дифференцирования и Таблица производных

u, v – дифференцируемые функции, ***c***– действительное число.

I. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

III. $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

V. $(v(u))' = v'(u) \cdot u'$

Производные основных функций		*Производные сложных функций*	
1	$(c)' = 0$		
2	$(x)' = 1$		
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	16	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	17	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

5	$\left(e^x\right)' = e^x$	18	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
6	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	19	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
7	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	20	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	21	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(\sin x)' = \cos x$	22	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	23	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	24	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	25	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$(\arccos\ x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	26	$(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	27	$(arctg\ u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15	$(arcctg\ \ x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	28	$(arcctg\ u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

Пример.

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных

а) $y = 5x^3 + \dfrac{6}{x^4} - 2$ б) $y = \ln x \cdot \cos x$ в) $y = \dfrac{e^x}{5^x}$

Решение:

а) В начале применяем правило II дифференцирования (производная суммы равна сумме производных). Далее применяем правило I дифференцирования (константу можно выносить за знак производной). При вычислении производных степенных функций удобно воспользоваться формулами свойства степеней (см. *Приложение*) и привести дроби (если это возможно) к виду x^n, где n – любое действительное число. Далее применяем формулы 3 и 1 из таблицы производных.

$$y' = \left(5x^3 + \frac{6}{x^4} - 2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(\frac{6}{x^4}\right)' - (2)' = 5(x^3)' + 6\left(x^{-4}\right)' - (2)' =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 6 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} - 0 = 15x^2 - 24x^{-5} = 15x^2 - \frac{24}{x^5}$$

б) Т.к. исходная функция представляет собой произведение двух функций: $\ln x$ и $\cos x$, то сначала применим III правило дифференцирования (производная произведения двух функций). После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных.

$$y' = (\ln x \cdot \cos x)' = (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{x} \cos x - \ln x \cdot \sin x.$$

в) Т.к. исходная функция представляет собой частное двух функций: e^x и 5^x, то сначала применим IV правило дифференцирования (производная частного двух функций). После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных

$$y' = \left(\frac{e^x}{5^x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot 5^x - e^x \cdot (5^x)'}{(5^x)^2} = \frac{e^x \cdot 5^x - e^x \cdot 5^x \ln 5}{(5^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot 5^x (1 - \ln 5)}{(5^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$$

<u>*Ответ:*</u> *а)* $15x^2 - \frac{24}{x^5}$; б) $\frac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$; в) $\frac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$

Пример. Найти производную сложной функции

а) $y = \cos(3x)$ б) $y = \left(5x^4 - \cos x - 1\right)^2$

<u>*Решение:*</u>

а) Данная функция является сложной $v(u)$, где внешняя $v = \cos u$, а внутренняя $u = 3x$. Поэтому применяем V правило дифференцирования и формулу 21 таблицы производных.

$$y' = (\cos(3x))' = -\sin(3x) \cdot (3x)' = -\sin(3x) \cdot 3 = -3 \cdot \sin(3x).$$

б) Данная функция является сложной $v(u)$, где внешняя $v = u^2$, а внутренняя $u = 5x^4 - \cos x - 1$. Поэтому применяем V правило дифференцирования и формулу 16 таблицы производных

$$y' = \left(\left(5x^4 - \cos x - 1\right)^2\right)' = 2 \cdot \left(5x^4 - \cos x - 1\right)^{2-1} \cdot \left(5x^4 - \cos x - 1\right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(5x^4 - \cos x - 1\right) \cdot (20x + \sin x).$$

<u>*Ответ:*</u> а) $-3 \cdot \sin(3x)$; б) $2 \cdot \left(5x^4 - \cos x - 1\right) \cdot (20x + \sin x)$

Производные высших порядков

Вторая производная (производная второго порядка), это производная от первой производной, т.е. $f'' = (f')'$

Производная *n*-го порядка функции называется производная от производной (n-1)-го порядка данной функции. Она обозначается

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Пример.

Найти значение $y'''(4)$, если $y = 5x^4 - 2x^2 + 3$.

Решение:

Находим поочередно первую, вторую и третью производные:

$$y' = (5x^4 - 2x^2 + 5)' = 5\cdot(x^4)' - 2(x^2)' + (3)' = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 0 = 20x^3 - 4x$$

$$y'' = (y')' = (20x^3 - 4x)' = 20\cdot 3\cdot x^2 - 4 = 60x^2 - 4$$

$$y''' = (y'')' = (60x^2 - 4)' = 60\cdot 2\cdot x - 0 = 120x$$

Вычисляем значение третьей производной в данной точке:

$y'''(4) = 120\cdot 4 = 480$.

Ответ: 480 .

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных. Найти значение производной в указанной точке.

1) $y = 2x - 9$	8) $y = 2x^3 + 3^x + 3 - 2\ln x$	16) $y = x^4 \cdot e^x$	24) $y = 2x^5 + 3x^3 + 6\cos x$
2) $y = x^3 + x^7$,	9) $y = 3e^x + 3\log_3 x - 4$	17) $y = \cos x \cdot \sin x$	25) $y = 4x^2 + 4^x + 3e^x - \ln x$
3) $y = 3x^2 + 5x + 6$	10) $y = 3\sin x - 2\cos x$	8) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$	26) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^3} - x^3 + \dfrac{5}{x^5}$ $x_0 = 1$
4) $y = 2x^4 + 9x^5$,	11) $y = tgx - ctgx$	19) $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$	27) $y = x^2 \cdot \sin x$
5) $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$	12) $y = 2\arcsin x + arc\cos x$	20) $y = \dfrac{4^x}{x}$	28) $y = x^5 \cdot 7^x$
6) $y = x + \dfrac{1}{x} - x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	13) $y = arctgx - 2arcctgx$	21) $y = \dfrac{1}{x^2} - x^2 + 2x$	29) $y = (2x^3 + 6x)\cdot e^x$
7) $y = x^2 - 52 + \ln x$	14) $y = \sin x \cdot x^3$	22) $y = x^3 \cdot 3^x$	30) $y = \dfrac{3x^3}{6^x}$
		23) $y = x^2 \cdot 2^x$	31) $y = \dfrac{x^5 - 3x}{\sin x}$

Задание 2 Найти производную сложной функции

1) $y = \cos 3x$	5) $y = \sqrt{\sin x}$	9) $y = \sqrt{5x}$

2) $y=(\cos x)^3$	6) $y=\arcsin(x^3)$	10) $y=(4x^4+5x-2)^2$
3) $y=(2x^2-x+5)^5$	7) $y=\ln 5x$	11) $y=(\ln x)^3$
4) $y=(x^3-3x^2+1)^3$	8) $y=\sin(10x^2+7x)$	12) $y=\arccos(8x+4)$

Задание 3 Найти третью производную (y''')

1) $y=x^2$ 4) $y=5x^{10}+2x^4$ 7) $y=4\sin x$

2) $y=cosx$ 5) $y=9^x+3x$ 8) $y=e^x+8^x$

3) $y=\ln x$ 6) $y=x^6-4x^3+5$ 9) $y=2x^5+3x^3+6$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1 Для чего нужны формулы дифференцирования?
2 Как вычисляется производная сложной функции?
3 Как вычисляются производные высших порядков7

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	1	2	3	4	5
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В - 1

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=2\cos x+5x^4-3$ б) $y=2\frac{1}{x^3}+tgx+4^x-3\log_2 x$ в) $y=\cos x\cdot(\sin x+x^4)$

г) $y=\frac{5x^2-3x+4}{2^x}$

2. Найти y'''**,** если $y=4x^3-5x$

В - 2

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^4-3x+\sin x$ б) $y=\frac{4}{x^8}+2ctgx-5\log_5 x-6^x$ в) $y=$ $lnx\cdot cosx$

г) $y=\frac{e^x+2x^3}{x^2}$

2. Найти y'''**,** если $y=5\cos x+4x$

В - 3

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=6x^7-3\cos x+8$ б) $y=2\cos x-6^x+\frac{1}{x^4}$ в) $y=3\cos x\cdot(x^2+x-10)$

г) $y=\dfrac{3x^3-\sin x+5}{2x^2}$

2. Найти y'''**,** если $y=x^3+5x^2$

В - 4

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^2-3x+4\cos x$ б) $y=5+\dfrac{2}{x^4}-5\ln x-3^x$ в) $y=x^2\cdot\ln x$ г) $y=\dfrac{\sin x+9x}{x^3}$

2. Найти y'''**,** если $y=2\sin x-7x$

В - 5

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^8-2\sin x+9$ б) $y=\dfrac{1}{x^2}+x^4-7^x$ в) $y = 2lnx \cdot cosx$ г) $y=\dfrac{5x^4-3x+\sin x}{5^x}$

2. Найти y'''**,** если $y=2x^{10}+5x+6$

Распределение баллов:

Задание	1а	1б	1в	1г	2
Баллы	**1**	**3**	**3**	**5**	**3**
Всего 15 баллов					

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 4	5 – 9	10 – 13	14 – 15
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

1.Название темы Исследование функции

2.Учебные цели: отработка умений и навыков исследования функции

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

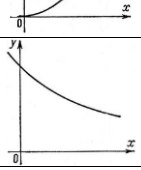
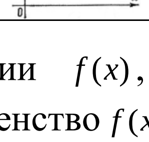
<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

<u>Терема (достаточное условие возрастания функции)</u>

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X , $(f'(x) > 0)$ то она **возрастает** на этом промежутке.

<u>Терема (достаточное условие убывания функции)</u>

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X $(f'(x) < 0)$, то она **убывает** на этом промежутке.

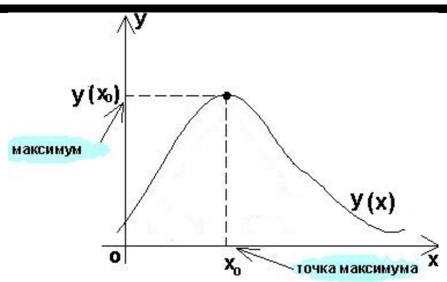
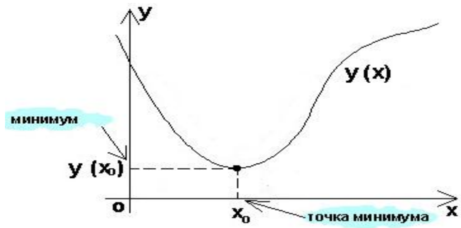
Знак производной на промежутке	**Поведение функции** $y(x)$	
$y' > 0$	$y(x)$ **возрастает**	
$y' < 0$	$y(x)$ **убывает**	

Точка x_0 называется точкой **максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Значение функции в этой точке $f(x_0)$ называется **максимумом функции.**

Точка x_0 называется точкой **минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Значение функции в этой точке $f(x_0)$ называется **минимумом функции.**

Максимум или минимум функции называются **экстремумом** функции

Поведение функции возле точки x_0	**Название** x_0	**Название** $y(x_0)$	**Пример**
$y(x) < y(x_0)$	точка **максимума**	**Максимум** функции	
$y(x) > y(x_0)$	точка **минимума**	**Минимум** функции	
	точка **экстремума**	**Экстремум** функции	

Необходимо условие экстремума. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.

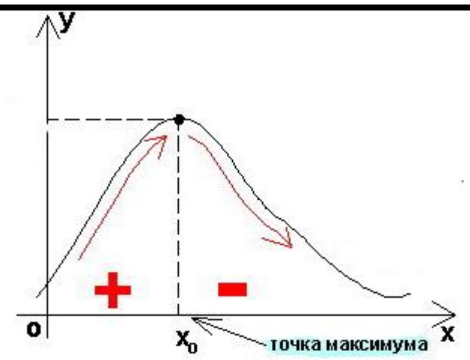
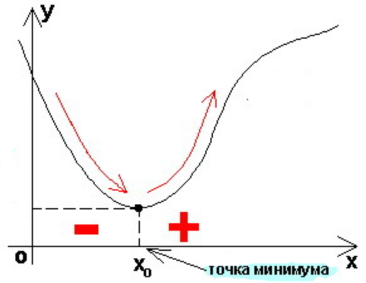
Точки, в которых производная равняется нулю или не существует называются **критическими**. Критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак то x_0 – точка экстремума, при этом:

– если знак меняется с «+» на «–» то x_0 – точка **максимума**,

– если знак меняется с «–» на «+» то x_0 – точка **минимума**.

Второе достаточное условие экстремума Если первая производная дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в этой точке положительна ($f''(x) > 0$), то x_0 – точка **минимума** функции, если $f''(x) < 0$, то x_0 – точка **максимума** функции.

y' меняет знак		**Название** x_0	$y'(x_0)=0$
с	*на*		
+	–	точка **максимума**	
–	+	точка **минимума**	

Выпуклость функции. Точки перегиба

Говорят, что график функции $y = f(x)$ **выпуклый вверх** на некотором интервале, если в этом интервале график расположен **под** любой своей касательной.

Говорят, что график функции $y = f(x)$ **выпуклый вниз** на некотором интервале, если в этом интервале график расположен **над** любой своей касательной.

Достаточное условие выпуклости графика функции. Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ **отрицательна** на некотором интервале, то график этой функции **выпуклый вверх** на данном интервале.

Достаточное условие вогнутости графика функции. Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ **положительна** на некотором интервале, то график этой функции **выпуклый вниз** на данном интервале.

Теорема. достаточное условие существования перегиба. Если для функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в ноль ($f''(x_0) = 0$) и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то эта точка x_0 является точкой перегиба.

Пример Найти промежутки монотонности, выпуклости, точки экстремума и точки перегиба кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

<u>Решение</u>.

1) Найдем промежутки монотонности. Для этого вычислим производную и найдем промежутки ее знакопостоянства

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 3\cdot 2x + 8\cdot 1 - 0 = x^2 - 6x + 8$$

Найдем точки, в которых производная равна нулю

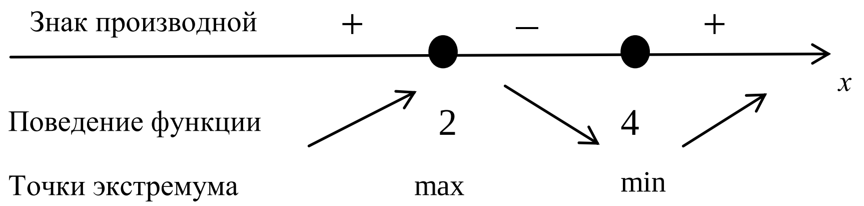
$x^2 - 6x + 8 = 0$

Решая квадратное уравнение, получаем: $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Значит, в этих точках производная функции равна нулю, следовательно, это точки, подозрительные на экстремум. Точно мы выяснить сможем, когда увидим, меняет ли знак производная, проходя через эти точки.

$y' = x^2 - 6x + 8$, т.к. корни найдены, то можно разложить на множители:

$y' = (x-2)(x-4)$

Подставляя любое число из промежутка в каждую скобку, получаем знак скобки и, учитывая это, определяем знак производной



$y \nearrow$ *при* $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

$y \searrow$ *при* $x \in (2; 4)$

Т.к. производная, проходя через точки меняет знак, что они являются точками экстремума.

$x_{\max} = 2$, $x_{\min} = 4$

2) Найдем точки перегиба. Для этого найдем вторую производную и промежутки ее знакопостоянства.

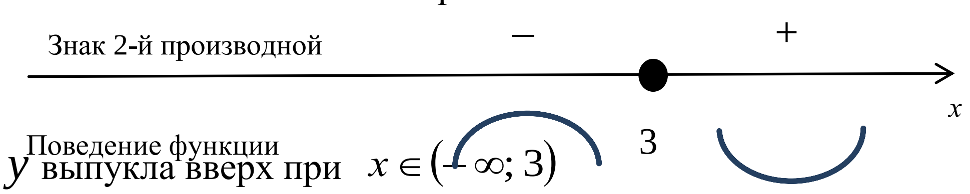
$y'' = (x^2 - 6x + 8)' = 2x - 6$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю

$y'' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$ - возможная точка перегиба



y выпукла вверх при $x \in (-\infty; 3)$

y выпукла вниз при $x \in (3;\, \infty)$

Т.к. вторая производная, проходя через точку $x = 3$ меняет знак, что эта точка является точкой перегиба.

Ответ.

$y \nearrow$ *при* $x \in (-\infty;\, 2) \cup (4;\, +\infty)$; $y \searrow$ *при* $x \in (2;\, 4)$

$x_{\max} = 2$, $x_{\min} = 4$ - точки экстремумов

y выпукла вверх при $x \in (-\infty;\, 3)$; y выпукла вниз при $x \in (3;\, \infty)$

$x = 3$ - точка перегиба

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Найти промежутки монотонности, выпуклости, точки экстремума и точки перегиба кривой

1) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$ 2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

8. Контрольные вопросы, и критерии оценки

1 Что такое промежутки монотонности функции, точки экстремума?

2 Необходимое и достаточное условие экстремума.

3 Что такое промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба?

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

1.Название темы Исследование функции и построение графика.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков исследования функции и построения графика

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось OX имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Построить график.

Комментарии к схеме:

6) **Асимптота** – это прямая, к которой приближаются точки графика

функции при бесконечном удалении их от начала координат.

Вертикальная асимптота $\boxed{x=a}$ если: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$

Горизонтальная асимптота $\boxed{y=b}$ если: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$

Наклонная асимптота $\boxed{y=kx+b}$

если: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \end{cases}$ или $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \end{cases}$

Пример : Исследовать функцию $y=x^3+x^2-x-1$ и построить ее график.

Решение:

исследуем функцию по схеме:

1. $D(y)(-\infty;\infty)$
2. $y(-x)=(-x)^3+(-x)^2-(-x)-1=-x^3+x^2+x-1=-(x^3-x^2-x+1)\neq y(x)\neq -y(x)$

Значит, функция не является ни четной, ни нечетной; т.е. функция общего вида. Также очевидно, что функция непериодическая

3. Найдем точки пересечения с (OX): $y=0$

$x^3+x^2-x-1=0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x=-1$ $\quad и \quad$ $x=1$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью $(OУ)$: $x=0$

$y(0)=0^3+0^2+0-1=-1$;

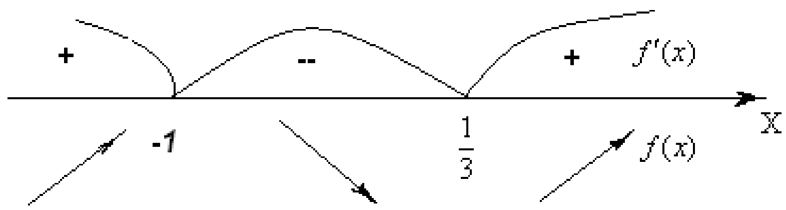
4. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y'=3x^2+2x-1$.

Найдем критические точки функции:

$3x^2+2x-1=0$.

Получим: $x_1=-1$ $\quad и \quad$ $x_2=\dfrac{1}{3}$.

Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



$y \nearrow$ при $x \in (-\infty; -1)$ $и$ $(\frac{1}{3}; +\infty)$,

$y \searrow$ при $x \in (-1; \frac{1}{3})$.

$x_{\max} = -1$, $x_{\min} = \frac{1}{3}$ - точки экстремумов

$y_{\max} = y(-1) = 0$. $y_{\min} = y(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$ -экстремумы

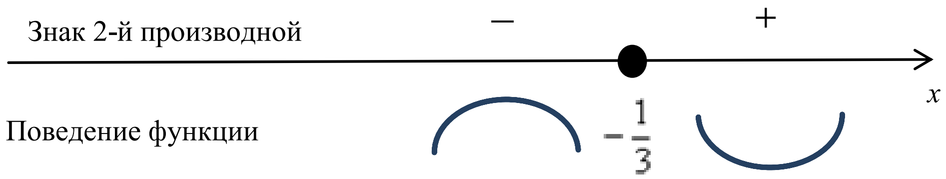
5. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную:

$$y'' = 6x + 2$$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю

$$6x + 2 = 0$$

$x = -\frac{1}{3}$ - возможная точка перегиба



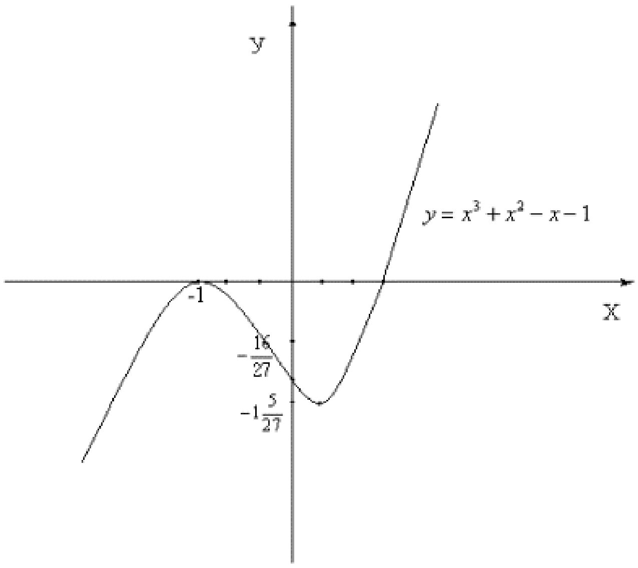
y выпукла вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$

y выпукла вниз при $x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

Т.к. вторая производная, проходя через точку $x = -\frac{1}{3}$ меняет знак, что эта точка является точкой перегиба.

6. Асимптот нет;

7. Построим график:



7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Исследовать функции и построить их графики

1) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

8. Контрольные вопросы, критерии оценки

1. Расскажите общую схему исследования функции.
2. Что такое асимптота?
3. Как найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба?
4. Как найти интервалы монотонности функции и точки экстремума?

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

1.Название темы Нахождение неопределенных интегралов

2.Учебные цели: отработка умений и навыков нахождения неопределенных интегралов

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

При интегрировании функций решается задача, обратная дифференцированию функций, а именно, <u>по заданной производной восстанавливается та функция, которую продифференцировали</u>.

Функция *F(x)* называется **первообразной** для функции *f(x)* на данном промежутке, если на этом промежутке выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

<u>**Теорема**</u>**:** Если функция ***F(x)*** является первообразной для функции ***f(x)*** на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции на этом промежутке задается формулой $F(x) + C$

где *C*– любое действительное число.

Выражение *F(x)+C* называется ***неопределенным интегралом*** от функции *f(x)* и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

читается: «*интеграл эф от икс по дэ икс*»

$\int$ - знак интеграла;

x – переменная интегрирования
***f*(*x*)** – подынтегральная функция;
f*(*x*)*dx – подынтегральное выражение.

<u>Интегрирование</u>– отыскание для функции всех ее первообразных.

<u>Пример</u>**:**
Для функции $f(x)=2x$ первообразными являются множество функций вида $F(x)=x^2+C$, т.к. $\left(x^2+C\right)'=2x$.
Т.е. $\int 2xdx = x^2+C$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx, \qquad m\neq 0$

2. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Таблица интегралов основных элементарных функций

1.	$\int dx = x+c$	8	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$
2.	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c; n\neq -1$	9	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$
3.	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+c$	10	$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$
4.	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$	11.	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+c$
5.	$\int e^x dx=e^x+c$	12.	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+c$
6.	$\int\sin xdx=-\cos x+c$	13.	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$
7.	$\int\cos xdx=\sin x+c$		

Пример
Вычислить неопределенный интеграл непосредственным интегрированием, т.е. с помощью свойств интеграла и таблицы интегралов

$$\int\left(5x^2-x+\frac{2}{x}-8\right)dx$$

Решение**:**
Применяем 2-е свойство неопределенного интеграла и разбиваем исходный интеграл на сумму трех интегралов. После этого применяем 1-е свойство – выносим постоянный множитель за знак интеграла. После этого применяем 1-ю, 2-ю и 3-ю формулы таблицы интегралов.

$$\int\left(5x^2-x+\frac{2}{x}-8\right)dx=5\int x^2dx-\int xdx+2\int\frac{dx}{x}-8\int dx=$$

$$=\frac{5x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-8x+c=\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x+2\ln|x|-8x+c$$

Ответ. $\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x+2\ln|x|-8x+c$

Пример Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int\frac{dx}{1-3x}$

Решение

$$\int\frac{dx}{1-3x}$$

Пусть $u=-3x$.

Продифференцируем обе части:

$$du=-3dx \quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{3}du$$

Тогда $\int\frac{dx}{1-3x}=\int\frac{-\frac{1}{3}du}{u}=-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{3}\ln|u|+c=-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$

Ответ. $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$

Пример Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ Пусть $u=5x-1\Rightarrow du=5dx\Rightarrow dx=\frac{1}{5}du$

Продифференцируем обе части:

$$du=5dx \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{1}{5}du$$

Тогда $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}=\int\frac{\frac{1}{5}du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{u}+c=\frac{2}{5}\sqrt{2x-3}+c$

Ответ. $\displaystyle\frac{2}{5}\sqrt{2x-3}+c$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Вычислить неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования

1) $\int(x+1)dx$

2) $\int(2x+3x^2+6)dx$

3) $\int(10x-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3})dx$

4) $\int(4e^x+5^x+x^5+5)dx$

5) $\int(4\sin x-7\cos x+2)dx$

6) $\int\frac{\cos^3 x+5}{\cos^2 x}dx$

7) $\int\frac{3x+6x^2-4}{x}dx$

8) $\int\frac{15x+3x^2-4x^5}{x^3}dx$

9) $\int\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx$

10) $\int\frac{6dx}{36-x^2}$

11) $\int\frac{7dx}{49+x^2}$

12) $\int(4\cos x+3^x-x^7+1)dx$

13) $\int(2\cos x-3\sin x)dx$

14) $\int\frac{4x+7x^2-2}{x^2}dx$

15) $\int\frac{5x^5-8x^3+12}{x^4}dx$

16) $\int\frac{5}{\sqrt{225-x^2}}dx$

17) $\int\frac{5dx}{100+x^2}$

Данные для самоконтроля

1) $\frac{x^2}{2}+x+C$

2) x^2+x^3+6x+C

3) $5x^2+\ln x-2.5x^{-2}+C$

7) $3x+3x^2-\ln x+C$

8) $-15x^{-1}+3\ln x-\frac{4}{3}x^3+C$

9) $3\arcsin\frac{x}{5}+C$

12) $4\sin x+\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{x^8}{8}+x+C$

13). $2\sin x+3\cos x+c$

14) $4\ln x+7x+2x^{-1}+C$

4) $4e^x+\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{x^6}{6}+5x+C$	10) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{6+x}{6-x}\right\|+c$	15) $2.5x^2-8\ln x-4x^{-3}+C$
5) $-4\cos x-7\sin x+2x+c$	11) $arctg\,\frac{x}{7}+c$	16) $5\arcsin\frac{x}{15}+c$
6) $\sin x+5tgx+c$		17) $0.5arctg\,\frac{x}{10}+c$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, $x\in(a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Перечислите основные табличные интегралы.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	1	2	3	4	5
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В - 1

Найти неопределенный интеграл

а) $\int(2\cos x+3^x-\frac{1}{\cos^2 x})dx$ б) $\int\frac{4x^5-2x^3+3x^2}{x^3}dx$ в) $\int\frac{dx}{x^2+25}$

В - 2

Найти неопределенный интеграл

а) $\int(3e^x+\frac{1}{\sin^2 x}+3\cos x)dx$ б) $\int\frac{2x^3+x^2-6x}{x^2}dx$ в) $\int\frac{dx}{9-x^2}$

В - 3

Найти неопределенный интеграл

а) $\int(5^x+\sin x-\frac{3}{\cos^2 x})dx$ б) $\int\frac{6x^6+2x+4}{x}dx$ в) $\int\frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

В - 4

Найти неопределенный интеграл

а) $\int(\frac{5}{\sin^2 x}+6^x-\cos x)dx$ б) $\int\frac{9x^7-4x^3+2x^2}{x^3}dx$ в) $\int\frac{dx}{121+x^2}$

В - 5

Найти неопределенный интеграл

а) $\int (8^x + 8\sin x - \frac{2}{\cos^2 x})dx$ б) $\int \frac{6x^4 - 3x^2 + 5x}{x^2} dx$ в) $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

Распределение баллов:

Задание	1а	1б	1в	
Баллы	**3**	**4**	**3**	
Всего 10 баллов				

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 3	4 – 7	8 – 9	10
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

1.Название темы Решение дифференциальных уравнений

2.Учебные цели: отработка умений и навыков решения дифференциальных уравнений

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

$$y = f(x, C_1, C_2)$$

<u>Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами</u>:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}, \quad \text{где} \quad p, q - const$$

Решения такого уравнения находятся при помощи <u>характеристического уравнения</u>, которое получается из данного заменой производных на λ в соответствующей степени:

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

И, в зависимости от корней этого уравнения, записывается общее решение:

Корни характеристического уравнения	***Общее решение***
Действительные разные (D > 0) $\lambda_1, \quad \lambda_2$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Действительные равные (D = 0) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = C_1 e^{\lambda x} + x \cdot C_2 e^{\lambda x}$
Пара комплексных сопряженных чисел (D < 0) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Пример Является ли решением диф. уравнения функция $y(x)$?

$xy' - 2y = 0, \qquad y = 5x^2$

Решение:

$y' = \left(5x^2\right)' = 10x$

Подставим $y = 5x^2$ и $y' = 10x$ в дифференциальное уравнение

$x \cdot 10x - 2 \cdot 5x^2 = 0$

$10x^2 - 10x^2 = 0$

$0 \equiv 0$

Получили верное равенство, значит, данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

Ответ: является.

Пример Найти общее решение диф.уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{e^x} = \frac{1}{y^2}$$

Решение:

1. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y^2}$$

2. Разделим переменные, получим:

$$y^2dy = e^x dx \ ,$$

3. Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int y^2 dy = \int e^{-x} dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = e^x + C \text{, отсюда}$$

$$y = \sqrt[3]{3e^x + C}$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{3e^x + C}$

Пример Найти общее решение диф.уравнения второго порядка

а) $y'' + y' - 2y = 0$, б) $y'' + 8y' + 16 = 0$ в) $y'' - 2y + 5 = 0$

Решение:

а) $y'' + y' - 2y = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2\cdot 1} = \frac{-1+3}{2} = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{D}}{2\cdot 1} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Т.к. корни характеристического уравнения – два разных действительных числа, то общее решение диф.уравнения имеет вид: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

Подставив λ_1 и λ_2, получим: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

б) $y'' + 8y' + 16 = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

$$D = 64 - 64 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{8+\sqrt{D}}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Т.к. корни характеристического уравнения – два одинаковых действительных числа, то общее решение диф.уравнения имеет вид: $y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$. Подставив $\lambda_1 = \lambda_2$, получим: $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$

в) $y'' - 2y + 5 = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16 < 0$

$\lambda_1 = \dfrac{2+\sqrt{16}\cdot i}{2\cdot 1} = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i, \qquad \lambda_2 = \dfrac{2-\sqrt{16}\cdot i}{2\cdot 1} = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

Т.к. корни характеристического уравнения – два сопряженных комплексных числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = 1$, а $\beta = 2$, то общее решение диф.уравнения имеет вид:

$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Подставив $\alpha = 1$ и $\beta = 2$, получим: $y = C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\sin 2x$

Ответ: а) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, б) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ в) $y = C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\sin 2x$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание1 Является ли решением диф. уравнения функция $y(x)$?

1) $y' - 3xy = 0, \qquad y = x^3$

2) $y'' = x^2 + y^2, \qquad y = \dfrac{1}{x}$

3) $y' = 3x^2 + 2, \qquad y = x^3 + 2x$

4) $y'' + y = 0, \qquad y = 3\sin x - 2\cos x$

Данные для самоконтроля

1) не является 2) не является 3) является 4) является

Задание 2 Разделить переменные:

1) $\cos y\, dy + \sin x\, dx = 0$

2) $(x+1)dx - 2xy\, dy = 0$

3) $\dfrac{dy}{e^x} = \dfrac{dx}{2y}$

4) $3y^2 y' - 4x = 0$

5) $\cos y - x^2 \cdot y' = 0$

6) $x \cdot y \cdot y' + \sin y \cdot \cos x = 0$

Данные для самоконтроля

1) $\cos y\, dy = -\sin x\, dx$ 2) $2y\, dy = \dfrac{(x+1)}{x} dx$ 3) $2ydy = e^x dx$

4) $3y^2\, dy = 4x\, dx$ 5) $\dfrac{dy}{\cos y} = \dfrac{dx}{x^2}$ 6) $\dfrac{y}{\sin y} dy = \dfrac{\cos x}{x} dx$

Задание 3 Найти общее решение диф.уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1) $y \cdot dy - x \cdot dx = 0$

7) $y' = \dfrac{e^x}{y^4}$

2) $y' = 2x^2 + 1$

3) $y' = \frac{1}{x} + e^x$

4) $\frac{y'}{e^x} = 1$

5) $y' = 2y$

6) $x \cdot y' = \frac{1}{e^y}$

8) $y \cdot y' + x = 1$

9) $y' = \frac{y}{x}$

10) $x \cdot y^2 \cdot y' = 1 - 2x^2$

11) $y' = \frac{x^5}{e^y}$

Данные для самоконтроля

1) $y^2 = x^2 + C$ 2) $y = \frac{2}{3}x^3 + x + C$ 3) $y = \ln x + e^x + C$ 4) $y = e^x + C$

5) $y = e^{2x} + C$ 6) $y = \ln(\ln x) + C$ 7) $y = \sqrt[5]{5e^x + C}$ 8) $y^2 = 2x - 2x^2 + C$

9) $y = x + C$ 10) $y = \sqrt[3]{3\ln x - 3x^2 + C}$ 11) $y = \ln\left(\frac{x^6}{6}\right) + C$

Задание 4 Найти общее решение диф.уравнения второго порядка

1) $y'' + 5y' - 6y = 0$

2) $y'' + 2y' + y = 0$

3) $y'' + 6y' + 13y = 0$

4) $y'' - 9y = 0$

5) $y'' - 4y' = 0$

6) $y'' + y = 0$

7) $y'' + 4y = 0$

8) $y'' - 5y' + 4y = 0$

9) $y'' - 2y' + 2y = 0$

10) $y'' - 6y' + 9y = 0$

11) $y'' - 2y' + y = 0$

12) $y'' - 4y' + 3y = 0$

13) $y'' - 4y' + 13y = 0$

14) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Данные для самоконтроля

1) $y = C_1e^x + C_2e^{-6x}$

2) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

3) $y = C_1e^{-3x}\cos 2x + C_2e^{-3x}\sin 2x$

4) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$

5) $y = C_1 + C_2e^{4x}$

8) $y = C_1e^x + C_2e^{4x}$

9) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$

10) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

11) $y = C_1e^x + C_2xe^x$

12) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$

6) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

13) $y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$

14) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Как составляется характеристическое уравнение?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными
$3y^2 \cdot y' - \cos x = 0$
2. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' - 12y' + 36y = 0$ б) $y'' + 2y' + 10y = 0$

В – 2

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными
$x^2 y' - 1 = 0$
2. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' + 3y' - 10y = 0$ б) $y'' + 8y' + 17y = 0$

В – 3

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными
$(1 - x^2) y' - 1 = 0$
2. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' + 3y' + 2y = 0$ б) $y'' - 4y' + 5y = 0$

В – 4

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными
$y' - 3y = 0$
2. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' + 6y' + 8y = 0$ б) $y'' + 4y' + 13y = 0$

В – 5

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными
$5y^5 y' - 2xy = 0$
2. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' + 4y' + 4y = 0$ б) $y'' - 4y' + 53y = 0$

Распределение баллов:

Задание	1а	2а	2б
Баллы	**3**	**3**	**4**
Всего 10 баллов			

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 4	5 – 7	8 – 9	10
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

1.Название темы Исследование рядов на сходимость

2.Учебные цели: отработка умений и навыков исследования рядов на сходимость

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 1 + 4 + \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Знакоположительный ряд – ряд, состоящий из положительных членов (предыдущие примеры)

Знакочередующийся ряд – ряд, знаки членов которого строго чередуются.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

Сходимость рядов

Частичной суммой ряда называется сумма первых ***n*** членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Числовой ряд называется **сходящимся**, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (т.е. предел равен конечному числу). Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется **расходящимся**.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, состоящий из его абсолютных величин.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд из его абсолютных величин расходится, то знакопеременный ряд называется **условно сходящийся**.

Признаки сходимости

1. Признак Даламбера. (для знакоположительных рядов)

Пусть дан числовой <u>знакоположительный</u> ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \qquad \begin{cases} l > 1, & \textit{ряд расходится} \\ l < 1, & \textit{ряд сходится} \\ l = 1, & \textit{требуются дополнительные исследования} \end{cases}$$

2. Признак сравнения. (для знакоположительных рядов)

Пусть даны два <u>знакоположительных</u> ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такие, что $a_n < b_n$, тогда

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

2) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Признак Лейбница (для знакочередующихся рядов):

Если для <u>знакочередующегося</u> ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняются условия

а) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$

б) общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$,

то ряд **сходится** и сумма ряда не превосходит по абсолютному значению абсолютной величины первого члена.

Если хотя бы одно условие не выполняется, то ряд **расходится**.

Степенной ряд

Степенной ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех *x*, при которых этот ряд сходится.

Эта область является симметричным интервалом относительно *x* = 0 на числовой оси (-*R*,*R*), где ***R*** – **радиус сходимости степенного ряда**, который вычисляется по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Разложение функций в степенные ряды

Ряд Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ определена при $x = 0$, и имеет в ней непрерывные производные любого порядка, то ее можно представить в виде степенного ряда, который называют рядом Маклорена (ряд Тейлора при ***a*** **= 0**):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

Функция	**Ряд Маклорена**	**Область сходимости**
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty,+\infty)$
$\sin x =$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$(-\infty,+\infty)$

$\cos x =$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$	$(-\infty,+\infty)$
$(1+x)^m =$	$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$(-1,1)$
$arctg\, x =$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$	$(-1,1)$
$\ln(1+x) =$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	$(-1,1\,]$

Пример. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$

Решение:

$$a_n=\frac{10^n}{n!},\qquad a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10\cdot 10^n}{n!\cdot(n+1)}$$

Найдем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10\cdot 10^n}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{10^n}=\frac{10}{n+1}$

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1$, значит, по признаку Даламбера, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится**.**

Пример. С помощью признака Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+7}$

Решение:

а) $|a_1|=\frac{1}{11},\quad |a_2|=\frac{1}{15},\quad |a_3|=\frac{1}{19}\quad\ldots$

Очевидно, что $|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots$. Т.е. члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+7}=\left\langle\frac{1}{\infty}\right\rangle=0$

Так как оба условия выполняются, то по признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{15^n}$

Решение:

$a_n=\frac{1}{15^n}$, $\quad a_{n+1}=\frac{1}{15^{n+1}}=\frac{1}{15^n\cdot 15}$

Найдем отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{15^n}\cdot\frac{15^n\cdot 15}{1}=15$

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}15=15$

Значит, радиус сходимости $R=15$. Получаем, что исходный степенной ряд сходится в промежутке $(-15,15)$

Ответ: сходится при $x\in(-15,15)$.

Пример. Разложить функцию в ряд Маклорена $y=e^{5x}$

Решение:

Для функции $y=e^x$ имеем разложение:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

тогда для функции $y=e^{5x}$ разложение получим из предыдущего, заменив x на $5x$:

$$e^{5x}=1+5x+\frac{(5x)^2}{2!}+\frac{(5x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(5x)^n}{n!}+\ldots \text{ или}$$

$$e^{5x}=1+5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n!}+\ldots.$$

Ответ: $e^{5x}=1+5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n!}+\ldots.$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{4^{n-1}}$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$	6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n+1}}$	10). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$	7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}$	11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$	8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$	12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

Данные для самоконтроля

1) сх. 2) сх. 3) сх. 4) сх. 5) сх. 6) сх. 7) сх. 8) сх. 9) расх. 10) сх. 11) сх. 12) расх.

Задание 2 С помощью признака Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n+3}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$	7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 2^n}$	5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+5}$	8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{2n+5}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$	6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}$	9) . $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}$

Данные для самоконтроля

1) сх. 2) сх. 3) сх. 4) расх. 5) сх. 6) сх. 7) расх. 8) сх. 9) сх.

Задание 3 Найти область сходимости степенного ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{20^n}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{2^{n-1}}$	7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	5) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot n!$	8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{7^n}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^2}$	9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n\cdot n}$

Данные для самоконтроля

1) $x\in(-20,20)$ 2) $x\in(-1,1)$ 3) $x\in(-\infty,\infty)$ 4) $x\in(-0{,}4,0{,}4)$ 5) $x\in(-\infty,\infty)$ 6) $x\in(-3,3)$. 7) $x\in(-1,1)$ 8) $x\in(-1{,}75,1{,}75)$ 9) $x\in(-4,4)$

Задание 4 Разложить функцию $y(x)$ в ряд Маклорена

1) $y=(1+x)^2$	3) $y=5e^{-3x}$	5) $y=3e^x$
2) $y=e^{6x}$	4) $y=\sin 4x$	6) $y=\cos 3x$
		7) $y=(1+4x)^4$

Данные для самоконтроля

1) $1+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\ldots+\frac{2(2-1)\ldots(2-n+1)}{n!}x^n+\ldots$

2) $1+6x+\frac{36x^2}{2!}+\frac{216x^3}{3!}+\ldots+\frac{(6x)^n}{n!}+\ldots$

3) $5+-15x+\frac{45x^2}{2!}-\frac{135x^3}{3!}+\ldots+\frac{5\cdot(-3x)^n}{n!}+\ldots$

4) $4x-\frac{64x^3}{3!}+\frac{1024x^5}{5!}-\frac{16384x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(4x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$

5) $3+3x+\frac{3x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\ldots+\frac{3x^n}{n!}+\ldots$

6) $1-\frac{9x^2}{2!}+\frac{81x^4}{4!}-\frac{729x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

7) $1+\frac{4}{1!}x+\frac{192}{2!}x^2+\ldots+\frac{4(4-1)\ldots(4-n+1)}{n!}(4x)^n+\ldots$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Какой ряд называется знакочередующимся?
2. Сформулируйте признак Лейбница сходимости ряда.
3. Сформулируйте признак Деламбера сходимости ряда.

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	7 12 17 22	8 13 18 23	9 14 19 24	10 15 20 25

В – 1

1. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{5^n}$

2. С помощью пр. Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6n+2}$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{4^n}$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена $y=e^{2x}$

В – 2

1. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n!}$

2. С помощью пр. Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{n^2}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n(n+1)}$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена $y = 7\cos x$

В – 3

1. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n}{4^n}$$

2. С помощью пр. Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+1}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена $y = \sin 10x$

В – 4

1. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8^n}$

2. С помощью пр. Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+2}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена $y = arctg\, 2x$

В – 5

1. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{5^n}$

2. С помощью пр. Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7}{6n+2}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{4^n}$

4. Разложить функцию в ряд Маклорена $y = e^{2x}$

Распределение баллов:

Задание	1	2	3	4
Баллы	**2**	**3**	**2**	**3**
Всего 10 баллов				

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 4	5 – 7	8 – 9	10
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

1.Название темы Разложение в ряд Фурье

2.Учебные цели: отработка умений и навыков разложения функций в ряд Фурье

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ в промежутке изменения аргумента $0 \le x \le 2\pi$ (или $-\pi \le x \le \pi$) называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

где

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ – *коэффициенты Фурье.*

Функция $f(x)$ – периодическая с периодом 2π

Тригонометрический ряд достаточно рассматривать только для значений x в промежутке $0 \le x \le 2\pi$ (или $-\pi \le x \le \pi$), т.к. за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена пяда периодически повторяется.

Разложение фукнции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд имеет важное значение а прикладных науках. Такое разложение в тригонометрический ряд называется гармоническим анализом.

Чтобы разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда, которые вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Пример.

Разложить функцию в ряд Фурье $y = x$ на промежутке $0 \le x \le 2\pi$

Решение.

Разложение в ряд Фурье на интервале $0 \le x \le 2\pi$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\frac{\sin n2\pi}{n} + \frac{\cos n2\pi}{n^2} - \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos n2\pi}{n} + \frac{\sin n2\pi}{n^2} - 0\right) = -\frac{2}{n}$$

Окончательно, получаем: $x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\sin nx$

Примечание:

$cos(\pi n) = (-1)^n$ $\qquad cos(2\pi n) = 1$ $\qquad sin(\pi n) = 0$

Ответ. $x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\sin nx$

Пример.

Разложить функцию в ряд Фурье $y=-x$ на промежутке $0 \le x \le 2\pi$

Решение.
Разложение в ряд Фурье на интервале $0 \le x \le 2\pi$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(-x)dx=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=-2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}-x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\sin n2\pi}{n}+\frac{\cos n2\pi}{n^2}-\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}-x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos n2\pi}{n}+\frac{\sin n2\pi}{n^2}-0\right)=\frac{2}{n}$$

Окончательно, получаем: $x=-\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$

Ответ. $x=-\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1) Разложить функцию в ряд Фурье $y=2x$ на промежутке $0 \le x \le 2\pi$
2) Разложить функцию в ряд Фурье $y=-2x$ на промежутке $0 \le x \le 2\pi$

Данные для самоконтроля

1) $x=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n}\sin nx$ 2) $x=-2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin nx$

8. Контрольные вопросы, и критерии оценки

1. Что называют рядом Фурье?
2. Какие функции рационально раскладывать в ряд Фурье?

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 18

1.Название темы Выполнение операций над множествами

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения операций над множествами

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

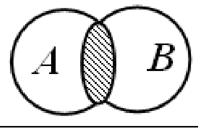
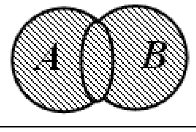
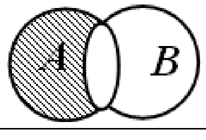
6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

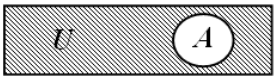
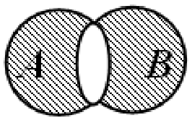
6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Основные операции над множествами

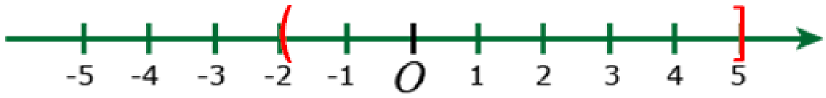
Из каких-либо данных множеств A и B можно построить новые множества с помощью операций объединения, пересечения, вычитания и др.

Название операции	**Обозначение**	**Изображение диаграммами Эйлера-Венна**	**Определение**
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно A* и *B*
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств *A* и *B*
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества *A*, которые *не принадлежат* множеству *B*

Дополнение к множеству *A*	$\overline{A}$		Те и только те элементы, которые *не принадлежат* множеству *A* (т.е. дополняют его до универсально множества *U*)
Симметрическая разность	$A\Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: либо А либо В, но не являются общими элементами этих множеств.

Пример Укажите множество всех целых чисел, находящихся в промежутке (-2; 5]. Какова мощность этого множества?

Решение: Обозначим искомое множество ***A***



По условию, в промежуток не входит число –2, а число 5 входит. С помощью числовой оси находим, что в данном промежутке 7 целых чисел: -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.

Значит,

A = {-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}, его мощность $|A| = 7$

Ответ: *A* = {-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}, $|A| = 7$

Пример Даны множества *A* = {2,4,5,8,9} и *B* = {0,1,2,3,4,5}. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A\Delta B$ и $\overline{A}$ если *U* – множество всех цифр, т.е. *U* = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

Решение:

$$A \cup B = (2,4,5,8,9) \cup (0,1,2,3,4,5) = (0,1,2,3,4,5,8,9)$$

$$A \cap B = (2,4,5,8,9) \cap (0,1,2,3,4,5) = (2,4,5)$$

$$A \setminus B = (2,4,5,8,9) \setminus (0,1,2,3,4,5) = (8,9)$$

$$A\Delta B = (2,4,5,8,9)\Delta(0,1,2,3,4,5) = (0,1,3,8,9)$$

$$\overline{A} = (0,1,3,6,7)$$

Ответ: $A \cup B = (0,1,2,3,4,5,8,9)$ $A \cap B = (2,4,5)$ $A \setminus B = (8,9)$

$A\Delta B = (0,1,3,8,9)$ $\overline{A} = (0,1,3,6,7)$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Какие из следующих соотношений справедливы:

1) $A \bigcup \varnothing = A$	3) $A \bigcap \varnothing = \varnothing$	5) $A \bigcup \overline{A} = A$
2) $A \bigcup \varnothing = \varnothing$	4) $A \bigcap \varnothing = A$	6) $A \setminus A = \varnothing$

Задание 2 Укажите множество всех целых чисел, находящихся в заданном промежутке. Какова мощность этого множества?

1) (1; 6)	4) (-7; 7]	7) [4; 9]
2) (2; 12]	5) [-6; 0.5]	8) (8; 10)
3) [3; 8]	6) (-3.5; 5.8)	9) [-9; 5)

Задание 3 Даны множества *A* и *B*. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, если *U* – множество всех цифр, т.е. *U* = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

Определите мощность каждого из полученных множеств.

1) *A* = {1,5,8,7,0} *B* = {3,2,1,5,8}	3) *A* = {1,4,7,8,5,0} *B* = {1,2,5,8,9,3,6}	5) *A* = {0,2,5,4,6,8} *B* = {2,1,4,3,6,5}
2) *A* = {0,1,4,7,2} *B* = {2,5,7,8,3,6}	4) *A* = {1,0,2,5,8,4} *B* = {0,1,4,7,2,5,}	6). *A* = {9,5,6,4,7} *B* = {3,4,5,8,2}

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Что такое множество? Пустое, универсальное множество? .
2. Операции над множествами

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

Даны множества A и B. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, если U – множество всех цифр.

Определите мощность каждого из полученных множеств. A = {2,6,4,5,9,0,1}, B = {2,3,6,1,0}

В – 2

Даны множества A и B. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, если U – множество всех цифр.

Определите мощность каждого из полученных множеств. A = {1,2,5,4,0}, B = {5,6,9,7}

В – 3

Даны множества A и B. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, если U – множество всех цифр.

Определите мощность каждого из полученных множеств. A = {6,9,4,0}, B = {5,8,9,6}

В – 4

Даны множества A и B. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, если U – множество всех цифр.

Определите мощность каждого из полученных множеств. A = {0,1,5,9,8}, B = {2,3,9,7,8}

В – 5

Даны множества A и B. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, если U – множество всех цифр.

Определите мощность каждого из полученных множеств. A = {1,2,9,4,6,5}, B = {0,1,2,3,6,5}

Распределение баллов:

Задание	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \Delta B$	$\overline{A}$
Баллы	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
Всего 10 баллов					

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 4	5 – 7	8 – 9	10
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 19

1.Название темы Построение диаграмм Эйлера-Венна.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков построения диаграмм Эйлера-Венна

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

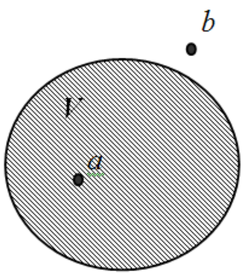
<u>Основные теоретические сведения и примеры решения заданий</u>

Диаграммы Эйлера-Венна

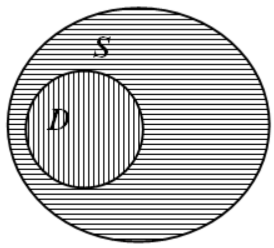
Множества удобно изображать с помощью **диаграмм Эйлера-Венна**

Построение диаграмм Эйлера-Венна

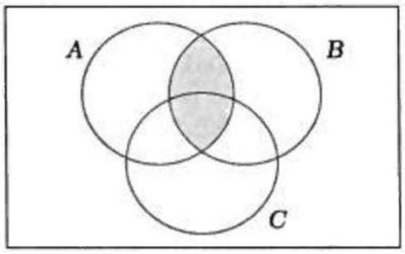
Пример:



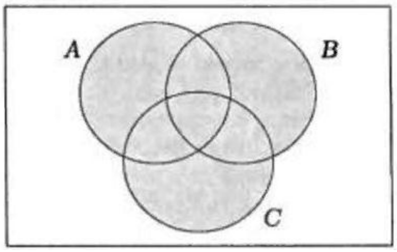
т. ***a*** принадлежит множеству *V* ($a \in V$), а т. ***b*** не принадлежит множеству *V* ($b \notin V$).



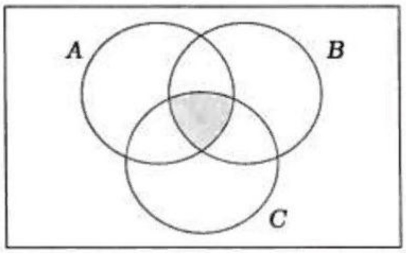
Множество ***D*** является подмножеством множества ***S*** ($D \subset S$)



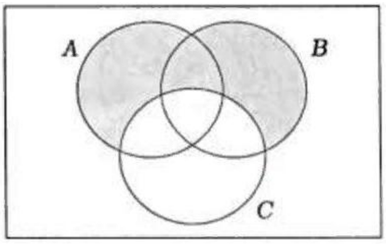
$A \cap B$



$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$

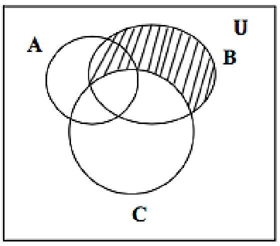


$(A \cup B) \setminus C$

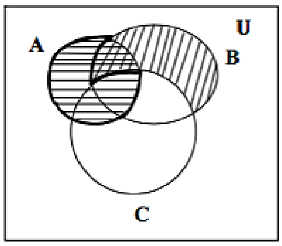
Пример.
Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение следующих множеств:

а) $A \setminus (B \setminus C)$ б) $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

а)

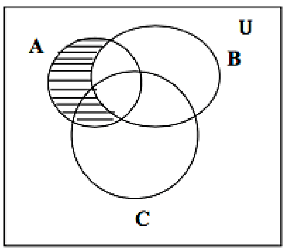


B\C

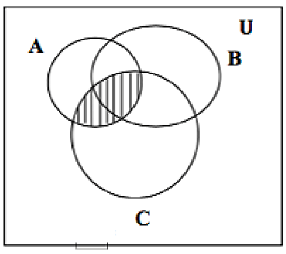


A\(B\C)

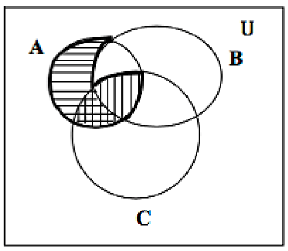
б)



A\B



A∩C



(A\B)∪(A∩C)

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Начертить диаграмму Эйлера-Венна, иллюстрирующую построение следующих множеств:

1) $A \cap \overline{B}$

2) $A \cup (B \cap C)$

3) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) $\overline{A \cup B}$

5) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

6) $\overline{A \cap B}$

8. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое диаграммы Эйлера-Венна?.
2. Как они применяются?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение множества $A \cup \overline{B}$

В – 2

Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение множества $\overline{A \cup B \cup C}$

В – 3

Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение множества $A \cup (B \setminus C)$

В – 4

Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение множества $\overline{A \setminus B}$

В – 5

Начертить диаграмму Эйлера-Венна, илллюстрирующую построение множества $\overline{A} \cap B$

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 20

1.Название темы Вычисление вероятности событий

2.Учебные цели: отработка умений и навыков вычисления вероятности событий

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Вероятность события. Свойства вероятности

Вероятность события, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности

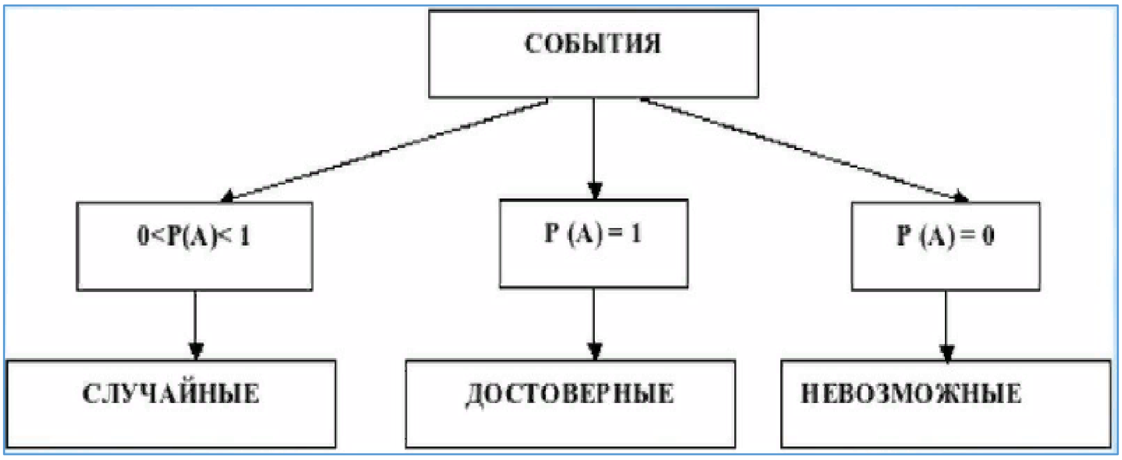
Обозначим

n- общее число всех возможных исходов испытания.

m- число исходов, благоприятствующих появлению события A.

Тогда **вероятность появления события *A*** будет определяться формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}$$ – *классическая вероятность*



Свойства вероятности

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицу.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. $P(A) = 1$, тогда и только тогда, когда A – достоверное событие.

3. $P(A) = 0$, тогда и только тогда, когда A – невозможное событие.

4. Для любого события A и противоположного ему $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Сложение вероятностей

Суммой $\boldsymbol{A+B}$ двух случайных событий называется событие, когда **наступает хотя бы одно из них**

A **ИЛИ** B

Пример 1. В ящике лежат цилиндр, конус, куб и пирамида. Из ящика берут наугад одну фигуру.
Возможные элементарные события:
A – взяли цилиндр,
B – взяли конус,
C – взяли куб,
D – взяли пирамиду.
Событием $A+B$ будет событие, когда взяли какое-то тело вращения: цилиндр **или** конус.

Теоремы сложения вероятностей.
Вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Сумма всех элементарных событий испытания (<u>полная группа событий</u>) образует <u>достоверное событие</u>.

Следствие 1

Если события A_1, A_2, … ,A_n в сумме образуют <u>полную группу</u>, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2

Сумма вероятностей противоположных событий и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Умножение вероятностей

Произведением $\boldsymbol{A \cdot B}$ двух случайных событий называется событие, <u>когда *A* и *B* наступают одновременно</u>

<u>*A* **И** *B*</u>

Пример

Два стрелка производят выстрелы по мишени.

События:

A - первый стрелок попал в цель, $\overline{A}$ – первый стрелок не попал в цель,

B – второй стрелок попал в цель, $\overline{B}$ - второй стрелок не попал в цель

Событием $A{\cdot}B$ будет событие, когда оба стрелка попали в цель.

Событием $\overline{A}\cdot\overline{B}$ будет событие, когда никто не попал в цель.

Теоремы умножения вероятностей

Теорема2.

Вероятность одновременного появления двух <u>**независимых**</u> событий равна произведению вероятностей этих событий**:**

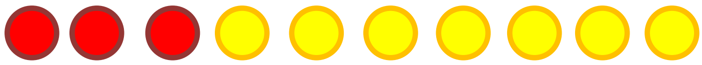
$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

Следствие. Вероятность появления <u>нескольких</u> событий, **независимых в совокупности**, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

Пример

В урне лежат 10 шаров. Из них 3 красные, а 7 желтые. Из урны вынимают наугад один шар. Какова вероятность того, что он будет желтым?



Решение.

Пусть A – **искомое событие**, т.е. то событие, вероятность которого мы ищем, т.е. событие A – вытащили желтый шар.
Общее число возможных исходов – очевидно, 10, т.к. в урне 10 шаров, значит вытащить шар можно 10 раз.
Значит, $n = 10$**.**
Число исходов, благоприятствующих тому, что вытащат желтый шар 7, т.к. в урне 7 желтых шаров.
Значит, $m = 7$**.**
Тогда вероятность появления события A (т.е. вероятность того, что вытащат именно желтый шар) вычисляется по формуле классической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Ответ. 0,7

Пример В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
Решение.

Пусть A – **искомое событие**, т.е. вынули выигрышный билет
Общее число возможных исходов $n = 1000$.
Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m = 200$.
Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Пример В случайном эксперименте монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.
Решение**.**
Пусть A – **искомое событие (**орел выпадет ровно один раз**)**
Перечислим все возможные исходы, когда монету дважды подкидывают
(О – орел, Р - решка): ОО РР ОР РО
Значит, всех возможных исходов $n = 4$
Число исходов, благоприятствующих появлению события A, $m = 2$: ОР и РО
Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Пример На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение.

Итак, обозначим события:

A - контрольная работа поступила из города *A*. По условию *P(A)*= 0.6

B - контрольная работа поступила из города B. По условию *P(B)*= 0.1

C - контрольная работа поступила из города C. *P(C) - ?*

Очевидно, что события A, B и C образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

P(A)+ P(B)+ P(C) = 1

Подставляя числовые значения, получим

$0{,}6+0{,}1+P(C)=1$, откуда

$P(C)=1-0{,}6-0{,}1=0{,}3$.

Ответ. 0,3

Пример Вероятность того, что день будет ясным, $0{,}85$. Найти вероятность того, что день будет облачным.

Решение.

Очевидно, что события «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому обозначим:

A - день ясный. По условию *P(A)*= 0.85

$\overline{A}$ - день облачный. $P(\overline{A})=?$

$P(A)+P(\overline{A})=1$, поэтому,

$P(\overline{A})=1-P(A)$

$P(\overline{A})=1-0{,}85$

$P(\overline{A})=0{,}15$

Ответ. 0,15

Пример В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A – искомое событие

B - из первой урны извлечен белый шар; $P(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

C - из второй урны извлечен белый шар. $P(C)=\dfrac{7}{12}$

Тогда $A = B \cdot C$

Очевидно, что события B и C независимы.
Тогда

$$P(A) = P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

Ответ. $\frac{7}{30}$

Пример На пункте контроля работают четыре контроллера. Вероятность того, что первый контроллер пропустит брак, равна 0,15, второй 0,13, третий 0,19, четвертый 0,2. Найти вероятность того, что

а) ни один контроллер не пропустит брак

б) хотя бы один котроллер пропустит брак

в) только два первых контроллера пропустят брак

Решение.
Пусть

A – искомое событие

B_1 - первый контроллер пропустит брак. По условию $P(B_1) = 0,15$

$\overline{B_1}$ - первый контроллер не пропустит брак.

$$P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - 0,15 = 0,85$$

B_2 - второй контроллер пропустит брак. По условию $P(B_2) = 0,13$

$\overline{B_2}$ - второй контроллер не пропустит брак.

$$P(\overline{B_2}) = 1 - P(B_2) = 1 - 0,13 = 0,87$$

B_3 - третий контроллер пропустит брак. По условию $P(B_3) = 0,19$

$\overline{B_3}$ - первый контроллер не пропустит брак.

$$P(\overline{B_3}) = 1 - P(B_3) = 1 - 0,19 = 0,81$$

а) A – искомое событие, т.е. ни один контроллер не пропустит брак, тогда

$$A = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$$

Т.к. пропустит какой-то контроллер брак или не пропустит, абсолютно не зависит от того, пропустит ли другой контроллер брак или не пропустит, то все события B_i - независимы и все $\overline{B_i}$ независимы, поэтому,

$$P(A) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 0,85 \cdot 0,87 \cdot 0,81 \approx 0,6$$

б) A – искомое событие, т.е. **хотя бы один** котроллер пропустит брак

Описание A в этой ситуации довольно громоздко, и, как следствие, и решение тоже громоздко. Т.е. в этой ситуации искомое событие получается такое – первый пропустил, а остальные нет; или второй пропустил, а остальные нет;

или третий пропустил, а остальные нет; или первый и второй пропустили, а третий нет; или первый и третий пропустили, а второй нет; или второй и третий пропустили, а первый нет; или все три пропустили, т.е.

$$A = B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 + +B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

В этой ситуации (когда задача содержит фразу «**хотя бы один**») удобно решать через противоположное событие.

Противоположное нашему событию – это событие, когда **никто не пропустил** брак:

$$\overline{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$$

Вероятность этого события найти гораздо легче, и мы его уже находили в пункте **а)**

$\overline{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \approx 0{,}6$, значит,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

в) A – искомое событие, т.е. только два первых контроллера пропустят брак

$$A = B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3}$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_3}) = 0{,}15 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}81 \approx 0{,}016$$

Ответ. **а)** 0,6; **б)** 0,4; **в)** 0,016

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Решить задачи по теории вероятностей

1) Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что они: а) обе упадут кверху «гербом» б) одна кверху «гербом», а другая кверху «решеткой»?
2)В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?
3) В большой партии насосов в среднем на каждые 1491 исправных приходится 9 неисправных насосов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным
4) Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что а)в цель попадут все три стрелка; б) в цель попадет хотя бы один стрелок; в) в цель попадет только один стрелок, г) в цель попадут два стрелка
5) В учебных мастерских техникума работают три сварочных аппарата. Вероятность того, что в течение учебной практики первый из них не потребует ремонта, равна 0,6, для второго аппарата такая вероятность равна 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что во время учебной практики а) ни один из аппаратов не потребует ремонта; б)первый

аппарат потребует ремонта, а второй и третий нет; в) первый и второй аппарат потребуют ремонта, а третий – нет; г) хотя бы один из аппаратов потребует ремонта.

Данные для самоконтроля

1) а)0,25 б) 0,5

2) 0,75

3) 0,006

4) а)0,504 б) 0,994 в) 0,092 г) 0,398

5) а)0,336 б) 0,224 в) 0,056 г) 0,664

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Какие события называют невозможными и достоверными.
2. Приведите формулу классической вероятности?
3. Перечислите свойства вероятности?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

1 В ящике 80 шурупов и 30 саморезов. Наугад вынимают один предмет. Какова вероятность, что он окажется шурупом?

2. На пункте контроля работают четыре контроллера. Вероятность того, что первый контроллер пропустит брак равна 0,1, второй – 0,15, третий – 0,2, четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что: а) что ни один контроллер не пропустит брак; б) хотя бы один котроллер пропустит брак; в) только два первых контроллера пропустят брак.

В – 2

1. В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями

2 Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент; в) только два последних элемента.

В – 3

1. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

2. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того допущенная ошибка превысит заданную точность а) только в первом; б) хотя бы в одном; в)только в двух последних.

В – 4

1. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

2. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого, 0,9 для второго и 0,98 для третьего. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают все три сигнализатора; б) сработает хотя бы один; в) сработают только два первых.

В – 5

1. В сборнике билетов по математике всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме "Геометрия". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Геометрия".

2. Вероятность попадания в цель орудия равна 0,8. Найти вероятность того, что при трех залпах а) будет три попадания; б) будет хотя бы оно попадание; в) будет только два последних попадания.

Оценка	**Критерии оценки**
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	Решено не менее 70 % заданий, приведены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Решено менее 30% заданий, не приведены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 21

1.Название темы Решение статистических задач.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков решения статистических задач

3. Продолжительность занятия: 2 акад.часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические рекомендации для студентов при проведении практических занятий

5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.

3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.

4. Башмаков М.И. Математика: учеб. для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015

6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/434515.

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Характеристики случайной величины

Математическое ожидание $M[X]$ дискретной случайной величины X называется ее *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний, вычисляемое по формуле: $M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Т. е. если испытание проводится много раз, то, чем больше провести испытаний, тем ближе среднее значение x будет к значению математического ожидания.

Дисперсией D называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения. Дисперсия представляет собой меру разброса элементов совокупности вокруг среднего значения.

$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2$ т.е. $D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-(M[X])^2$

Средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из дисперсии. Среднее квадратическое отклонение является, как и дисперсия, мерой разброса элементов совокупности, но измеряется, в отличие от дисперсии, в тех же единицах, которые используют для измерения значений случайной величины.

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Пример.
Дано распределение дискретной случайной величины X . Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	5	6	7	8
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

<u>Решение.</u>

Математическое ожидание находим по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}6 + 7 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}1 = 6{,}3$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(M(X)\right)^2 = 5^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}6 + 7^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}1 - 6{,}3^2 =$$

$$= 2{,}5 + 21{,}6 + 9{,}8 + 6{,}4 - 39{,}69 = 0{,}61$$

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}78$$

<u>**Ответ:**</u> $M(X) = 6{,}3$, $D(X) = 0{,}61$, $\sigma = 0{,}78$

7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1 Дано распределение дискретной случайной величины X . Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

1)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

2)

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Данные для самоконтроля

1) $M(X)=2{,}1,\quad D(X)=1{,}29,\quad \sigma=1{,}14$

2) $M(X)=4{,}6,\quad D(X)=6{,}64,\quad \sigma=2{,}54$

8. Контрольные вопросы, задания и критерии оценки

1. Что такое случайная величина?
2. Что такое распределение случайной величины?
3. Какие вы знаете характеристики случайной величины?

Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Распределение вариантов в зависимости от номера в списке в журнале:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер в журнале по списку	1 6 11 16 21	2 7 12 17 22	3 8 13 18 23	4 9 14 19 24	5 10 15 20 25

В – 1

Задан закон распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x	5	6	7	8
p	0,1	0,6	0,2	0,1

В – 2

Задан закон распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x	-2	-1	0	1
p	0,1	0,6	0,2	0,1

В – 3

Задан закон распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

В – 4

Задан закон распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x	0	1	2	3
p	0,1	0,6	0,2	0,1

В – 5

Задан закон распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x	1	2	3	4
p	0,3	0,2	0,1	0,4

Распределение баллов:

Задание	$M(X)$	$D(X)$	σ
Баллы	**3**	**5**	**2**
Всего 10 баллов			

Критерии оценки:

Набранные баллы	0 – 3	4– 7	8 – 9	10
Оценка	**2**	**3**	**4**	**5**

9.Форма отчета: Выполните задания на листах. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки